

Texto para Discussão

Série Economia

TD-E 16 / 2009

**TECNOLOGIA MENOS POLUENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO EM
UM MODELO COM EXPANSÃO DA VARIEDADE DE PRODUTOS**

Prof. Dr. Eliezer Martins Diniz



Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
de Ribeirão Preto

Reitora da Universidade de São Paulo
Suely Vilela

Diretor da FEA-RP/USP
Rudinei Toneto Junior

Chefe do Departamento de Administração
André Lucirton Costa

Chefe do Departamento de Contabilidade
Adriana Maria Procópio de Araújo

Chefe do Departamento de Economia
Walter Belluzzo Junior

CONSELHO EDITORIAL

Comissão de Pesquisa da FEA-RP/USP

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Avenida dos Bandeirantes, 3900
14049-900 Ribeirão Preto - SP

A série TEXTO PARA DISCUSSÃO tem como objetivo divulgar: i) resultados de trabalhos em desenvolvimento na FEA-RP/USP; ii) trabalhos de pesquisadores de outras instituições considerados de relevância dadas as linhas de pesquisa da instituição. A série foi subdividida em função das principais áreas de atuação da FEA-RP/USP: Economia, Administração e Contabilidade. Veja o site da CPq na Home Page da FEA-RP: www.fearp.usp.br. Informações: e-mail: cpq@fearp.usp.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

ELIEZER MARTINS DINIZ

Tecnologia menos poluente e crescimento econômico em um modelo com
expansão da variedade de produtos

Ribeirão Preto

2009

ELIEZER MARTINS DINIZ

Tecnologia menos poluente e crescimento econômico em um modelo com
expansão da variedade de produtos

Tese apresentada ao Departamento de Economia
da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Livre-Docente

Área de concentração: Desenvolvimento Econômico

Ribeirão Preto

2009

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Ficha Catalográfica

Diniz, Eliezer Martins.

Tecnologia menos poluente e crescimento econômico em um modelo com expansão da variedade de produtos. Ribeirão Preto, 2009.

92 f.: il.

Tese (Livre-Docência) – Universidade de São Paulo, 2009.

1. Crescimento econômico. 2. Variedade de produtos. 3. Poluição.

Nome: Eliezer Martins Diniz

Título: Tecnologia menos poluente e crescimento econômico em um modelo com expansão da variedade de produtos

Tese apresentada ao Departamento de Economia
da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Livre-Docente

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Dedico esta tese à minha esposa Benner Jacks

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me dado a saúde necessária e as idéias para a elaboração desta tese.

Agradeço à minha esposa pelo apoio e compreensão durante o período em que escrevi esta tese, e também pelo incentivo dado durante toda a minha carreira docente.

Agradeço à FEA-RP/USP como um todo pelo ambiente de trabalho propício e por ter acreditado que minha linha de pesquisa é relevante.

Agradeço a meus ex-professores que, em maior ou menor grau, contribuíram para que eu compreendesse melhor a teoria econômica.

RESUMO

DINIZ, Eliezer M. **Tecnologia menos poluente e crescimento econômico em um modelo com expansão da variedade de produtos.** 2009, 92 f. Tese (Livre-Docência) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

Esta tese tem como objetivo ampliar o modelo de crescimento com expansão da variedade de produtos de Paul Romer pela incorporação de diversos poluentes com potenciais poluidores distintos em todos os setores da economia. Inicialmente desenvolvemos os diversos blocos do modelo para então analisarmos o equilíbrio sob as óticas descentralizada e centralizada. Obtemos uma representação gráfica do modelo na versão descentralizada, a qual é utilizada para analisar diversas alternativas de política pública e seus impactos sobre o consumo por trabalhador, a variedade de produtos e o estoque de poluição. Destacamos entre os resultados que uma política de incentivos à adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens intermediários representa efetivamente um aumento do bem-estar, enquanto que a mesma política no setor de bens finais possui um impacto ambíguo sobre o bem-estar.

Palavras-chave: Crescimento econômico. Variedade de produtos. Poluição.

ABSTRACT

DINIZ, Eliezer M. **Cleaner technology and economic growth in a model with an expanding variety of products.** 2009, 92 f. Tese (Livre-Docência) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

This thesis aims at enlarging Paul Romer's model of endogenous growth with an expanding variety of products by including pollutants with different pollution potentials in all sectors of the economy. Initially we develop the blocs of the model and then analyze the equilibrium under decentralized and centralized settings. We obtain a graphical representation of the model in the decentralized version, and then use it in order to analyze some alternatives of public policy and their impacts on consumption per worker, variety of products and pollution stock. The main results show that incentives to the adoption of cleaner technologies in the intermediate goods sector actually produce an increase in welfare, although the same policy applied to the final goods sector have an ambiguous effect on welfare.

Keywords: Economic growth. Variety of products. Pollution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Equilíbrio do estoque de poluição.....	44
Figura 2 – Impacto da existência de poluentes com potenciais diferentes.....	46
Figura 3 – Equilíbrio da variedade de produtos.....	61
Figura 4 – Equilíbrio do consumo por trabalhador.....	73
Figura 5 – Equilíbrio do consumo por trabalhador e da variedade de produtos.....	74
Figura 6 – Diagrama de fase da dinâmica do preço sombra da poluição.....	77
Figura 7 – Equilíbrio do modelo de crescimento com variedade de produtos e poluição.....	79
Figura 8 – Efeito de uma tecnologia com menor grau poluidor no setor de bens finais.....	80
Figura 9 – Efeito de uma tecnologia com menor grau poluidor no setor de bens intermediários.....	81

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 TECNOLOGIA MENOS POLUENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO – CONSTRUÇÃO DE UM MODELO COM EXPANSÃO DA VARIEDADE DE PRODUTOS.....	14
1. Produção de bens finais.....	15
2. Setores de P&D e bens intermediários.....	24
3. Emissões de poluentes.....	31
3.1. Equação dinâmica da poluição.....	31
3.2. Emissões e seus determinantes.....	38
3.3. Análise da dinâmica da poluição.....	42
3.4. Impacto da existência de múltiplos poluentes sobre a poluição.....	45
3.5. Efeitos no equilíbrio do estoque de poluição.....	47
3.6. Formalização dos efeitos.....	53
4. Dinâmica dos ativos.....	57
5. Comportamento dos indivíduos.....	61
6. Resumo do capítulo.....	64
3 TECNOLOGIA MENOS POLUENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO – SOLUÇÃO DO MODELO COM EXPANSÃO DA VARIEDADE DE PRODUTOS.....	66
1. Solução para a economia descentralizada.....	66
1.1. Condições de primeira ordem.....	67
1.2. Interpretação das condições.....	68
1.2.1. Condição para a variável de controle.....	68
1.2.2. Condições para as variáveis de estado.....	69
1.2.3. Dinâmica do preço sombra da poluição.....	74
1.2.4. Condições de transversalidade.....	77
1.3. Representação gráfica do modelo.....	78
1.4. Resumo do equilíbrio e da dinâmica das variáveis principais.....	82
2. Solução para a economia centralizada.....	84
2.1. Condições de primeira ordem.....	85
2.2. Interpretação das condições.....	86
2.2.1. Condição para as variáveis de controle.....	86
2.2.2. Condições para as variáveis de estado.....	88
2.2.3. Dinâmica do preço sombra da poluição.....	89
2.2.4. Condições de transversalidade.....	89
3. Conclusões.....	89
REFERÊNCIAS.....	91

1

INTRODUÇÃO

A elaboração de modelos de crescimento econômico atingiu um novo patamar a partir da década de 1950 com o modelo de Solow (SOLOW, 1956). Esse modelo, partindo de identidades básicas de contabilidade nacional para uma economia fechada e sem governo, supõe uma relação comportamental em que o consumo é uma fração constante da renda (isto é, uma propensão marginal a consumir constante) e procura analisar o impacto da acumulação de capital sobre o crescimento econômico.

O problema principal desse modelo é que, empiricamente, não consegue explicar as diferenças observadas no mundo real entre rendas per capita dos diversos países independentemente de seu grau de desenvolvimento. As magnitudes observadas precisariam, para serem replicadas pelo modelo, de diferenças no estoque de capital per capita da ordem de mil vezes ou mais, o que de forma alguma se verifica na realidade.

Uma das alternativas para se tentar ajustar um modelo aos dados é flexibilizar a hipótese da constância da propensão a poupar presente no modelo de Solow. Esse ponto foi tratado adequadamente por Ramsey (RAMSEY, 1928) e seus sucessores (KOOPMANS, 1965; CASS, 1965) em um contexto com agentes que maximizam a utilidade por toda a vida sujeitos a uma restrição intertemporal. Em uma economia descentralizada, a restrição do modelo de Ramsey mostra a dinâmica dos ativos (capital e dívida privada) considerando usos e fundos da renda. Os agentes fazem suas escolhas para maximizar o bem-estar sob a hipótese de que as firmas maximizam lucros e escolhem o montante de cada fator empregado de acordo. Em uma economia centralizada com um planejador central onisciente, a restrição mostra a dinâmica do capital por meio de uma identidade básica de contabilidade nacional. Neste caso, a escolha das firmas quanto à utilização de fatores é feita pelo planejador central, o que substitui o processo decisório individual das firmas. É possível que o enfoque mais simples adotado por Solow, quando já havia sido publicado o artigo clássico de Ramsey, se deva a uma simplificação proposital, dado que na mesma época Friedman estava prestes a publicar sua teoria de renda permanente que tinha fundamentos econômicos e bom ajuste aos dados (FRIEDMAN, 1957) e provavelmente Solow já tinha contato com os resultados principais da pesquisa de Friedman.

Outra forma de tentar casar os dados com um modelo de crescimento é a expansão do conceito de capital, que passa a englobar não apenas o capital físico mas também o capital humano. Dentro do capital humano estaria todo o diferencial que torna um trabalhador qualificado (educação e, também, a saúde). Um trabalho clássico que possui um tratamento do capital humano e seu papel no crescimento é o de Lucas (LUCAS, 1988).

Outra forma de tentar fazer com que o modelo se ajuste adequadamente aos dados é tratar do problema verificado no modelo de Solow, em que a explicação do crescimento econômico se dá com base em uma variável que se supunha exógena: a taxa de progresso tecnológico. Logo, é necessário explicar os determinantes do progresso tecnológico. Podemos destacar duas linhas de pesquisa principais que procuram identificar os determinantes do progresso tecnológico. A primeira, que abrange os modelos com expansão da variedade de produtos, tem dois artigos pioneiros de Paul Romer (ROMER, 1987; ROMER, 1990). Ela destaca a evolução de tecnologias que nunca se tornam obsoletas e que ocorrem no setor de bens intermediários, proporcionando a seu inventor um direito ao monopólio da exploração dessa invenção. A segunda linha de pesquisa é a de modelos schumpeterianos, com artigo pioneiro de Aghion e Howitt (AGHION; HOWITT, 1992). A essência dessa classe de modelos é o estudo dos determinantes de invenções que podem se tornar obsoletas ao surgir uma inovação com qualidade superior, algo que é chamado de destruição criativa. Pode-se dizer que ambas as linhas de pesquisa se complementam, embora a princípio não se consiga vislumbrar a fusão delas em um modelo único.

Paralelamente a essas linhas de pesquisa, temos o estudo da relação entre crescimento econômico e meio ambiente. As emissões de poluentes guardam uma relação com o crescimento econômico que é empiricamente detectável. A curva ambiental de Kuznets possui um formato de U invertido no plano emissões-renda per capita, o que pode ser traduzido através de duas fases no desenvolvimento econômico: primeiramente, o desenvolvimento de um país se dá juntamente com o aumento das emissões de poluentes; em um segundo momento, o desenvolvimento ocorre juntamente com a diminuição das emissões de poluentes. Na primeira fase predomina o que Grossman (GROSSMAN, 1995) chama de efeito escala, onde o aumento de produção, para uma dada tecnologia e uma dada composição setorial do produto, necessariamente está aliado a um aumento da emissão de poluentes. Na segunda fase, temos dois efeitos que podem diminuir ou até compensar o efeito escala, a saber o efeito técnica (gerado pela adoção de tecnologias menos poluentes) e o efeito composição (gerado pela mudança da composição do produto, o que pode favorecer setores que emitam menos poluentes). A princípio, a curva ambiental de Kuznets era considerada uma relação empírica e, por isso, sofria diversas críticas. No entanto, Stokey (STOKEY, 1998) mostrou que, a partir de um modelo de crescimento econômico micro-fundamentado, é possível obter a curva ambiental de Kuznets como resultado do comportamento ótimo dos agentes na trajetória de ajuste rumo ao equilíbrio, bastando para isso que seja satisfeita a condição de uma elasticidade de substituição intertemporal do consumo menor do que um. Blanchard e Fischer (BLANCHARD; FISCHER, 1988, p. 44, 52) coloca que os resultados empíricos apontam para uma elasticidade igual ou menor que um, ou seja, predomina o efeito-renda sobre o efeito substituição. Logo a ocorrência da curva ambiental de Kuznets não só é possível teoricamente como pode ocorrer na prática. Com isso, a discussão sobre a necessidade de políticas públicas para fomentar um desenvolvimento sustentável fundamentado em uma tecnologia menos poluente volta à cena de uma forma mais rigorosa. Uma resenha elucidativa sobre a curva ambiental de Kuznets foi escrita por Dasgupta e outros (DASGUPTA; LAPLANTE; WANG; WHEELER, 2002), discutindo os artigos mais importantes e mostrando ao leitor a aplicabilidade da curva de Kuznets e o estado da arte nesse tema.

O presente trabalho procura buscar respostas relativas à relação entre crescimento econômico e poluição na linha de pesquisa iniciada por Romer com base na variedade de produtos. Nosso propósito é explorar o surgimento de tecnologias com graus diferentes de emissão de poluentes. A inovação deste trabalho consiste em explorar dentro de modelos com variedades de produto como inserir as emissões de poluentes e, dentro disso, apontar possíveis alternativas de política pública que possam levar a um desenvolvimento sustentável associado a uma matriz tecnológica menos poluente. Há diversos temas que serão explorados no modelo desenvolvido neste trabalho: a inclusão dessas tecnologias no modelo com expansão da variedade de produtos; a possibilidade de que tecnologias menos poluentes possam tornar obsoletas as tecnologias semelhantes (porém mais poluentes), sem que isso ocorra com tecnologias de natureza diferente; e a possibilidade do surgimento de novos poluentes como decorrência das tecnologias novas. Vamos procurar fazer um tratamento exclusivamente teórico do tema, que pode eventualmente ser explorado empiricamente no futuro.

2 TECNOLOGIA MENOS POLUENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO – CONSTRUÇÃO DE UM MODELO COM EXPANSÃO DA VARIEDADE DE PRODUTOS

Este capítulo faz uma análise da adoção de tecnologias menos poluentes no modelo com expansão da variedade dos produtos. Tomamos como base para a elaboração do modelo os tratamentos feitos por Barro e Sala-i-Martin (BARRO; SALA-I-MARTIN, 2004) e Romer (ROMER, 1990). A parte do texto referente às emissões de poluentes beneficiou-se dos artigos de Stokey (STOKEY, 1998) e Beltratti e outros (BELTRATTI; CHICHILNISKY; HEAL, 1995).

O modelo descrito a seguir se destina a caracterizar a ocorrência da produção de bens finais e bens intermediários em uma economia onde são emitidos diversos poluentes diferentes, cada um associado a um bem. Nesta economia, todos os bens intermediários são utilizados e nunca se tornam obsoletos. A única situação em que um bem pode se tornar obsoleto é aquela em que as características poluidoras do bem mudam, características estas medidas pelo grau poluidor de um bem e pelo potencial poluidor de um poluente. Isto caracterizaria a adoção de uma tecnologia menos poluente. Se um bem intermediário ou um bem final for substituído por outro menos poluente (isto é, com um grau poluidor menor) produzido pela mesma firma, o bem mais poluente deixa de ser produzido e cede lugar ao bem menos poluente, algo semelhante à obsolescência do bem mais poluente. Note que tanto o bem mais poluente quanto o menos poluente são produzidos pela mesma firma, e que um simplesmente substitui o outro na linha de produção, sendo resultado das atividades de P&D. Também pode ocorrer a situação em que um determinado poluente passa a ser indesejado e precisa ser banido da economia. Nesse contexto, um bem intermediário pode ser substituído por outro semelhante fabricado pela mesma firma que não produza o poluente indesejado, mas apenas um outro poluente tolerado, com potencial poluidor menor. É como se um bem se tornasse obsoleto e fosse substituído por outro na mesma firma. A nova tecnologia difere apenas no poluente associado e foi produzida pelas atividades de P&D. Os casos referentes ao grau poluidor estão associados a uma emissão de poluentes menor. Os casos relacionados ao potencial poluidor referem-se a uma troca de um poluente por outro. Todos os casos descritos acima podem ser acomodados pelo modelo elaborado neste capítulo. O modelo somente não contempla a situação em que um bem seja substituído por um bem diferente produzido por outra firma. Consideramos que essa situação no presente modelo não seja permitida, e supomos que isso não exerça efeitos importantes sobre os resultados e sua adequação à análise do mundo real. A substituição por um bem produzido em outra firma se encaixa em uma análise do tipo schumpeteriana, que não será desenvolvida no presente trabalho.

As seções a seguir descrevem os blocos do modelo, a saber o setor de bens finais, os setores de bens intermediários e pesquisa e desenvolvimento, as emissões de poluentes, o comportamento dos ativos, as escolhas de consumo e o equilíbrio em todos os setores.

1. Produção de bens finais

A economia produz um único bem final que pode ter três destinações: consumo; bens intermediários; e investimento em pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias (P&D). Há três setores: bens finais, bens intermediários e P&D. Utilizamos o termo “bens finais” por conveniência, embora haja somente um tipo de bem final.

No modelo, supomos que a P&D e a produção de bens intermediários ocorram dentro da mesma firma. É como se as atividades de P&D se dessem em um departamento da firma produtora de bens intermediários. Dentro dessa configuração, a receita recebida pela firma produtora de bens intermediários é repartida entre a remuneração pela produção e a remuneração pela P&D por meio de procedimentos internos da firma. Se os setores estivessem em firmas separadas, então a firma que produz um tipo de bem intermediário teria que pagar explicitamente ao inventor da patente uma licença pelo uso da tecnologia, e a verba seria retirada do lucro apropriado pela firma através da venda do bem intermediário especializado.

O modelo apresenta uma variedade de produtos representada por um continuum de N tipos de bem intermediário, os quais, combinados com trabalho não qualificado, são utilizados para produzir bens finais. A produção de bens finais se dá em um contexto de concorrência perfeita e, portanto, leva a lucro zero. A produção de bens intermediários ocorre em um ambiente de concorrência imperfeita. Supõe-se que cada inovação importante seja produzida por uma firma diferente, que adquire uma patente perpétua sobre o uso da nova tecnologia e passa a produzir um novo tipo de bem intermediário. É a posse de uma patente que permite um lucro positivo e, conseqüentemente, fornece incentivos econômicos para a ocorrência de invenções no setor de bens intermediários. Todos os bens intermediários produzidos na economia são necessários para a produção de bens finais. Supomos, sem perda de generalidade, que o preço dos bens finais seja igual a um. Consideramos, para todos os efeitos, que os termos renda, PIB, produto e produção de bens finais sejam sinônimos. Supomos, a fim de simplificar a exposição em todo o texto, que o tamanho da população seja constante e igual ao número de trabalhadores.

A função de produção do setor de bens finais é um pouco diferente da utilizada no modelo em que não existem tecnologias menos poluentes. Isso ocorre porque cada tecnologia menos poluente atua de forma diferente sobre o produto efetivo. Quanto menos poluente a tecnologia, menor é o produto efetivo a ela associado, dado o produto potencial. A razão entre o produto efetivo e o produto potencial é o grau poluidor da tecnologia. Cada um dos $N + 1$ tipos de tecnologia produzidos (N no setor de bens intermediários e um no setor de bens finais) possui um grau poluidor associado, e não procuramos explicar como é determinado

esse grau. Neste modelo supomos também que, com relação às emissões, cada tipo de bem intermediário está associado a um tipo de poluente diferente. O progresso tecnológico aumenta o número de tipos de bem intermediário disponíveis mas traz consigo um problema, que é o aumento do número de tipos de poluente. Nesta economia há um continuum de N tipos de bem intermediário e um continuum de N tipos de poluente, além de um bem final e de um poluente associado a ele. Cada um desses tipos de poluentes tem um potencial poluidor diferente. Por exemplo, um tipo de poluente pode poluir muitas vezes mais do que a mesma quantidade de outro, e o potencial poluidor procura caracterizar esse fato pela conversão de cada poluente para uma medida comum de poluição. Os conceitos de grau poluidor e potencial poluidor são diferentes e não devem ser confundidos, sendo devidamente formalizados ao longo do trabalho.

Uma forma de modelar a função de produção com tecnologias menos poluentes é utilizar a mesma estratégia adotada por Stokey para os bens finais em seu modelo (STOKEY, 1998). Multiplicamos o produto potencial $X^p(j)$ do tipo de bem intermediário j por um índice de tecnologia $z(j)$, onde $z(j) \in [0,1]$. Fazemos o mesmo para o produto potencial de bens finais Y^p , que é multiplicado por z , onde $z \in [0,1]$. O índice de tecnologia representa o grau poluidor dessa tecnologia, indo de zero (menos poluente) a um (mais poluente). Neste modelo, o produto potencial é o produto que pode ser obtido ao se utilizar a tecnologia mais poluente. Temos que $X(j) \equiv z(j)X^p(j)$ é o produto efetivo do tipo de bem intermediário j , e que $Y \equiv zY^p$ é o produto efetivo de bens finais na economia. Isso significa que um produto efetivo maior de bens intermediários ou de bens finais está associado a uma tecnologia mais poluente (isto é, a um grau poluidor maior) e a um fluxo maior de emissões, dado o produto potencial correspondente. Para que possamos usar o cálculo diferencial, generalizamos N e passamos a considerá-lo como sendo uma medida do grau de complexidade tecnológica do processo produtivo de uma firma típica. Quanto maior N , maior a complexidade tecnológica do processo produtivo. Fazendo isso, podemos tratar N como uma variável contínua, como estava implícito na discussão acima.

O produto efetivo de bens finais na firma i é dado pela função de produção

$$Y_i = zAL_i^{1-\alpha} \int_0^N [X_i(j)]^\alpha dj \quad (1)$$

que pode ser reescrita como

$$Y_i = zAL_i^{1-\alpha} \int_0^N [z(j)X_i^p(j)]^\alpha dj \quad (1')$$

onde Y é o produto efetivo de bens finais, L é o trabalho não qualificado, A é uma medida geral de produtividade, N é a gama de variedades de bens intermediários e o índice j refere-se à variedade tecnológica j .

O formato da função de produção (1) tem como implicação o uso de todas as tecnologias no equilíbrio. Esse resultado é determinado pelo produto marginal do bem intermediário j , dado por

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i(j)} = zAL_i^{1-\alpha} \int_0^N \alpha [X_i(j)]^{\alpha-1} dj$$

onde $j \in [0, N]$. É fácil constatar a igualdade dos produtos marginais de todos os tipos de bem intermediário na firma i . Isso indica que uma dada tecnologia nunca se torna obsoleta, por mais antiga que seja. Também podemos dizer que, para qualquer firma do setor de bens finais, a quantidade efetiva utilizada de cada tipo de bem intermediário no continuum de N tecnologias é igual, qualquer que seja o grau poluidor da tecnologia considerada. Ou seja, $z(j)X_i^p(j) = X_i(j) = \bar{X}_i, \forall j$. Logo

$$\int_0^N [X_i(j)]^\alpha dj = (\bar{X}_i)^\alpha \int_0^N dj = N(\bar{X}_i)^\alpha = N^{1-\alpha}(N\bar{X}_i)^\alpha$$

onde $N\bar{X}_i$ é a quantidade efetiva de bens intermediários utilizados como insumo na firma i do setor de bens finais. A igualdade da utilização de cada fator de produção ocorre porque todas as firmas são iguais e estão em um ambiente de concorrência perfeita em que a trajetória da remuneração dos fatores é dada.

Substituindo-se esse resultado em (1), obtemos a função de produção de bens finais para a firma i no equilíbrio, que é dada por

$$Y_i = zAL_i^{1-\alpha} N^{1-\alpha} (N\bar{X}_i)^\alpha \quad (2)$$

Em toda a análise, supomos implicitamente que todos os tipos de bem intermediário tenham seu produto efetivo expresso em uma unidade comum e, dessa forma, possam ser agregados. Outra consequência da igualdade dos produtos efetivos dos diversos tipos de bem intermediário é que ela leva, para quaisquer m e n , onde $m \neq n$ e $m, n \in [0, N]$, à seguinte expressão

$$\frac{X_i^p(m)}{z(n)} = \frac{X_i^p(n)}{z(m)}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $z(m) < z(n)$ (isto é, a tecnologia m seja menos poluente que a tecnologia n), temos que $X_i^p(m) > X_i^p(n)$ (isto é, o produto potencial da tecnologia menos poluente é maior) para que a quantidade efetivamente utilizada dos dois bens intermediários seja igual no equilíbrio. Esse resultado independe do grau poluidor da tecnologia utilizada.

Seja π_i o lucro da firma i produtora de bens finais, o qual é dado por

$$\pi_i = Y_i - wL_i - \int_0^N P(j)X_i(j)dj \quad (3)$$

onde, como em todo contexto de concorrência perfeita, a trajetória dos preços de fatores é dada para as firmas de bens finais.

Substituindo (1) em (3), podemos expressar o problema de maximização de lucros da firma i como

$$\max_{X_i} \pi_i = \max_{X_i} \left\{ \int_0^N \{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^\alpha - P(j) X_i(j) \} dj - w L_i \right\}$$

Diferenciando com relação ao argumento e igualando a zero, obtemos a equação

$$\int_0^N \{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j) \} dj = 0 \quad (4)$$

PROPOSIÇÃO 1: A solução de (4) para a firma i é dada por

$$P(j) = \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1}$$

para todo $j, j \in [0, N]$.

Prova: Seja uma partição do intervalo $[0, N]$ com n sub-intervalos dada por $[0, N_1], (N_1, N_2], \dots, (N_{k-1}, N_k], (N_k, N_{k+1}], \dots, (N_{n-1}, N]$, onde $N_j = N_{j-1} + \frac{N}{n}$ para $1 \leq j \leq n$, com $N_0 = 0$ e $N_n = N$. Suponha que a variedade tecnológica N se expanda ao longo do tempo por causa do crescimento econômico, seguindo as etapas dadas por $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N$. Vamos demonstrar inicialmente que a solução do problema para o intervalo $[0, N]$ vale em $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. A demonstração utiliza a indução matemática. A seguir, analisamos o limite da solução para um número infinito de sub-intervalos.

Suponha que a economia no momento inicial se encontre no intervalo $[0, N_1]$, ou seja, temos a variedade tecnológica N_1 . Nesse contexto, a equação (4) se resume a

$$\int_0^{N_1} \{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j) \} dj = 0$$

Pelo Teorema do Valor Médio (SWOKOWSKI, 1983, p.244), temos

$$\int_0^{N_1} \{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j) \} dj = \{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(h_1)]^{\alpha-1} - P(h_1) \} N_1$$

para algum $h_1, h_1 \in (0, N_1)$. Logo, para esse h_1 , temos por substituição que $\{ \alpha z AL_i^{1-\alpha} [X_i(h_1)]^{\alpha-1} - P(h_1) \} = 0$. Portanto, a solução proposta da equação no intervalo $[0, N_1]$ vale em $\{h_1\}$.

Suponha que a economia se encontre no intervalo $[0, N_2]$, ou seja, ela passa a ter N_2 tipos de bens intermediários. Logo, o problema passa a ser

$$\int_0^{N_2} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

A equação pode ser reescrita como

$$\int_0^{N_1} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj + \int_{N_1}^{N_2} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

Como, na etapa anterior, supusemos que a solução proposta de

$$\int_0^{N_1} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

seja válida em $\{h_1\}$, temos que a equação se resume a

$$\int_{N_1}^{N_2} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\int_{N_1}^{N_2} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(h_2)]^{\alpha-1} - P(h_2)\} (N_2 - N_1)$$

para algum $h_2, h_2 \in (N_1, N_2)$. Logo, para esse h_2 , temos $\{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(h_2)]^{\alpha-1} - P(h_2)\} = 0$. Portanto, a solução proposta da equação no intervalo $(N_1, N_2]$ vale em $\{h_2\}$. A solução proposta da equação no intervalo $[0, N_2]$ vale em $\{h_1, h_2\}$.

Suponha que a economia se encontre no intervalo $[0, N_k]$, ou seja, ela passa a ter N_k tipos de bens intermediários. Suponha que a solução proposta da equação no intervalo $[0, N_k]$ seja válida em $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$.

Suponha agora que a economia se encontre no intervalo $[0, N_{k+1}]$, ou seja, ela passa a ter N_{k+1} tipos de bens intermediários. Logo, a equação passa a ser

$$\int_0^{N_{k+1}} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

A equação pode ser reescrita como

$$\int_0^{N_k} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj + \int_{N_k}^{N_{k+1}} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

Como, na etapa anterior, supusemos que a solução proposta de

$$\int_0^{N_k} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

seja válida em $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$, temos que a equação se resume a

$$\int_{N_k}^{N_{k+1}} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj = 0$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} \int_{N_k}^{N_{k+1}} \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1} - P(j)\} dj \\ = \{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(h_{k+1})]^{\alpha-1} - P(h_{k+1})\} (N_{k+1} - N_k) \end{aligned}$$

para algum $h_{k+1}, h_{k+1} \in (N_k, N_{k+1})$. Logo, para esse h_{k+1} , temos $\{\alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(h_{k+1})]^{\alpha-1} - P(h_{k+1})\} = 0$. Portanto, a solução proposta da equação no intervalo $(N_k, N_{k+1}]$ vale em $\{h_{k+1}\}$. A solução proposta da equação no intervalo $[0, N_{k+1}]$ vale em $\{h_1, h_2, \dots, h_{k+1}\}$.

Por indução, temos que a solução proposta do problema para o intervalo $[0, N]$ vale em $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. A solução proposta para (4) na economia com N variedades tecnológicas considerou uma partição com n sub-intervalos. O número de pontos onde vale a solução proposta depende do número n de sub-intervalos na partição. Fazendo $n \rightarrow \infty$, podemos dizer que existem infinitos pontos onde a solução proposta de (4) é válida. Logo, podemos concluir que a solução dada por

$$P(j) = \alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^{\alpha-1}$$

vale para todo $j, j \in [0, N]$. \square

Rearranjando a solução de (4) temos, para cada tipo de bem intermediário j , que

$$P(j) X_i(j) = \alpha z A L_i^{1-\alpha} [X_i(j)]^\alpha \tag{4'}$$

uma condição que vale para cada tipo de bem intermediário $j, j \in [0, N]$. Fica claro que a quantidade de outros tipos de bem intermediário não influi em (4').

Substituindo (4') e (1) em (3), obtemos o lucro máximo da firma i , dado por

$$\pi_i = \left\{ (1 - \alpha) z A L_i^{-\alpha} \int_0^N [X_i(j)]^\alpha dj - w \right\} L_i \tag{3'}$$

O termo à direita da igualdade em (3') é a diferença entre o produto marginal do trabalho na firma i e o salário real, multiplicada pelo número de trabalhadores empregados na firma i . Como no setor de bens finais temos concorrência perfeita, o salário real e o produto marginal do trabalho são iguais. Logo, temos que o lucro máximo da firma i é igual a zero. Podemos, portanto, extrapolar esse mesmo resultado para todo o setor de bens finais.

Utilizando (1), a expressão (3') pode ser reescrita como

$$\pi_i = (1 - \alpha)Y_i - wL_i \quad (3'')$$

A demanda por trabalho na firma i é dada ao se igualar o produto marginal do trabalho na firma i ao salário real, um resultado discutido em (3') que produz um lucro máximo igual a zero. Daí vem, igualando (3'') a zero, que

$$L_i = (1 - \alpha) \left(\frac{Y_i}{w} \right) \quad (5)$$

onde a demanda por trabalho da firma i responde positivamente ao produto efetivo da firma i e negativamente ao salário real, que é o preço do trabalho. Outra forma de visualizar (5) é

$$wL_i = (1 - \alpha)Y_i \quad (5')$$

De acordo com (5'), a folha salarial da firma i em termos reais (dada pelo salário real multiplicado pelo número de trabalhadores contratados pela firma i) é uma parcela fixa do produto da firma i . Ou, em outros termos, a parcela da renda que remunera o fator trabalho na firma i é constante e igual a $(1 - \alpha)$.

Dado que cada firma do setor de bens finais possui lucro igual a zero, podemos extrapolar os resultados em (5) e (5') para o setor de bens finais como um todo. Logo

$$L = (1 - \alpha) \left(\frac{Y}{w} \right) \quad (5'')$$

$$wL = (1 - \alpha)Y \quad (5''')$$

onde L é o número de trabalhadores no setor de bens finais e Y é o produto do setor.

Expressando de outra forma, a condição de lucro zero para a firma i pode ser escrita a partir de (3) como

$$Y_i = wL_i + \int_0^N P(j)X_i(j)dj \quad (6)$$

Substituindo (5') em (6), vem

$$\int_0^N P(j)X_i(j)dj = \alpha Y_i \quad (6')$$

Ou seja, a receita do setor de bens intermediários proveniente da firma i do setor de bens finais é igual a uma parcela α da renda da firma i . O produto da firma i se divide, portanto, entre a renda que remunera o trabalho contratado pela firma i e a renda paga ao setor de

bens intermediários. Como a firma que produz o bem intermediário também faz P&D, temos que o valor recebido por ela deve tanto cobrir os custos de fabricação do bem intermediário quanto remunerar a atividade de P&D. O custo de se produzir uma unidade do bem intermediário, dada uma tecnologia, é igual a um, que é o preço do bem final. Logo, a receita recebida pelo setor de bens intermediários pode ser dividida entre X_i , o custo total dos bens intermediários demandados pela firma i , dado por

$$X_i \equiv \int_0^N X_i(j) dj = \bar{X}_i \int_0^N dj = N\bar{X}_i$$

e o lucro do setor de bens intermediários, obtido ao subtrair o custo X_i da receita em (6'), o que resulta em

$$\alpha Y_i - X_i = \int_0^N [P(j) - 1] X_i(j) dj = \bar{X}_i \int_0^N [P(j) - 1] dj = \left\{ \left(\frac{1}{N} \right) \int_0^N P(j) dj - 1 \right\} X_i \quad (7)$$

A expressão (7) nos dá a remuneração da atividade de P&D no setor de bens intermediários decorrente da venda de uma parcela de sua produção para a firma i do setor de bens finais. Ela pressupõe um equilíbrio no setor de bens finais, pois a quantidade efetiva utilizada de cada bem intermediário é idêntica. A expressão também é obtida no processo de maximização de lucros do setor de bens finais. Vemos em (7) que a remuneração da atividade de P&D é dada pela diferença entre o preço médio e o custo multiplicada pela quantidade total de bens intermediários demandada pela firma i . Tanto a receita quanto o lucro do setor de bens intermediários descritos acima refletem apenas a parcela recebida da firma i que produz bens finais. O lucro total do setor de bens intermediários é obtido pela soma dos lucros recebidos de todas as firmas do setor de bens finais, o que leva a $\alpha Y - X$, onde Y é o produto agregado efetivo do setor de bens finais e X é o produto agregado efetivo do setor de bens intermediários.

Tomando a condição para maximização do lucro em (4'), podemos rearranjar a expressão e obter uma demanda derivada por bens intermediários válida para a situação ótima em que os lucros do setor de bens finais são máximos e iguais a zero. Assim, a curva de demanda da firma i por bens intermediários é dada por

$$X_i(j) = L_i \left[\frac{A\alpha z}{P(j)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (8)$$

A curva de demanda responde negativamente ao preço dos bens intermediários, o que representa um resultado convencional. A elasticidade-preço da demanda $\epsilon(X, P)$ é, em valor absoluto, igual a $\frac{1}{1-\alpha} > 1$. Como (8) é uma demanda derivada a partir de uma dada tecnologia no setor de bens finais, a demanda da firma i por bens intermediários responde positivamente ao trabalho empregado na firma i , à produtividade da firma i (igual à produtividade do setor de bens finais) e ao grau poluidor da tecnologia empregada na firma i (igual ao grau poluidor da tecnologia do setor de bens finais). Note que a demanda pelo bem intermediário j não depende do grau poluidor da tecnologia utilizada em sua fabricação. Quanto menos poluente a

tecnologia utilizada no setor de bens finais, menor será a demanda por bens intermediários (pois menor será o produto efetivo obtido no setor de bens finais).

A forma intensiva da função de produção de bens finais para a firma i é obtida dividindo-se (1) pelo trabalho não qualificado empregado na firma i , o que produz

$$y_i = zA \int_0^N [x_i(j)]^\alpha dj$$

onde as variáveis y e x representam, respectivamente, o produto e os bens intermediários da firma i , ambos em termos por trabalhador. No equilíbrio, temos que a quantidade por trabalhador de qualquer um dos bens intermediários utilizados no processo produtivo da firma i é igual, ou seja, $z(j)x_i^p(j) = x_i(j) = \bar{x}_i, \forall j$. Esse resultado leva à função de produção intensiva de bens finais para a firma i no equilíbrio, dada por

$$y_i = zAN^{1-\alpha}(N\bar{x}_i)^\alpha \quad (9)$$

que é a versão em termos intensivos de (2).

Tanto em (2) quanto em (9) podemos ver para a firma i , dados os montantes de trabalho (L_i) e de cada bem intermediário (\bar{X}_i), que a inovação que expande o continuum de variedade de produtos N e aumenta a complexidade tecnológica contorna o problema dos rendimentos decrescentes e possibilita um crescimento contínuo.

Vamos a seguir obter a função de produção agregada normal e em termos intensivos. Suponha que cada firma produtora de bens finais seja idêntica, e que seu produto seja igual ao das demais, o que é consistente com a hipótese de concorrência perfeita nesse setor. Por isso, a função de produção agregada se comporta da mesma forma que a função de produção de cada firma, e podemos escrever no equilíbrio que

$$Y = zAL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^\alpha \quad (2')$$

Para chegar à expressão final não há dúvidas com relação ao produto agregado Y , que é a soma do produto das firmas do setor de bens finais, e nem com relação à oferta de trabalho L , que é a soma dos trabalhadores empregados nas firmas produtoras de bens finais, com a hipótese adicional de que existe pleno emprego do fator. Com relação a X , o total dos bens intermediários da economia, pode-se proceder de duas formas diferentes: somar a quantidade de bens intermediários demandados por todas as firmas, onde o total de cada firma é dado por X_i ; ou fazer a soma do total de cada tipo de bem intermediário, considerando que, como cada um dos bens intermediários é usado na mesma quantidade que os demais em cada firma, então cada um dos bens intermediários é utilizado na mesma quantidade que os demais no agregado. A escolha da segunda estratégia leva ao cálculo de $X = \int_0^N X(j) dj = N\bar{X}_j$, onde \bar{X}_j é a quantidade total do bem intermediário j em um contexto de maximização de lucros (veja a seção seguinte) e X é a soma das quantidades idênticas de cada tipo de bem intermediário ao longo dos N tipos diferentes de bens intermediários.

A função de produção agregada em termos intensivos no equilíbrio é dada por

$$y = zAN^{1-\alpha}x^\alpha \quad (9')$$

onde $x = \int_0^N x(j) dj = N\bar{x}_j$ e x é a quantidade total de bens intermediários por trabalhador da economia. Considerações semelhantes às da fórmula (2') valem também neste caso.

2. Setores de P&D e bens intermediários

De acordo com o que colocamos na seção anterior, cada firma de P&D também está envolvida com a fabricação de um bem intermediário como resultado da P&D. Por isso, utilizamos em diversas partes do texto o termo “setor de bens intermediários” como sinônimo de “setores de P&D e bens intermediários”. Supomos neste modelo que os bens intermediários sejam compostos de serviços e bens não duráveis. O motivo para isto é manter o modelo em uma complexidade que ainda possa ser administrada. Se fizéssemos a opção de incluir nos bens intermediários somente bens duráveis, teríamos como variáveis de estado o capital, o número da variedade de produtos e o estoque de poluição, este último a ser introduzido em seção posterior. Seria, portanto, um modelo com três variáveis de estado, o que eleva a complexidade além da classe de modelos Uzawa-Lucas, notoriamente difíceis de serem analisados. Portanto, optamos por um modelo que apresenta duas variáveis de estado, a saber o número N de tipos de variedade de produtos e o estoque de poluição.

Conforme mencionamos anteriormente, o setor de bens intermediários é formado por N firmas que produzem, cada uma, um tipo de bem intermediário e, conseqüentemente, emitem um tipo de poluente diferente. Há, portanto, um continuum de N tipos de bens intermediários produzidos por N firmas que, por sua vez, produzem um continuum de N tipos de poluentes diferentes. Além desse continuum de N tipos de poluentes, é necessário lembrar que há um poluente adicional produzido pelo setor de bens finais. Uma invenção ocorrida no setor de P&D leva a uma expansão da variedade de produtos, conferindo à firma uma patente perpétua que lhe permite produzir o novo tipo de bem intermediário com essa tecnologia e cobrar pelo bem um preço acima do custo marginal (normalizado igual a um), o que reflete um poder de monopólio resultante da patente. Essa política de preços produz um lucro positivo que remunera adequadamente a inovação e faz com que o setor de P&D se perpetue na economia. A necessidade de um preço acima do custo marginal ocorre porque a invenção é um bem não rival, e isto faz com que o custo marginal de se reproduzir uma idéia já inventada seja praticamente nulo, o que desmotivaria a pesquisa e o desenvolvimento de novas tecnologias e a produção de novas variedades de bens intermediários. A patente concede ao possuidor um grau de exclusividade na utilização da idéia, de modo que aqueles que não pagam podem ser excluídos, uma vez que não seria possível, em tese, a imitação e a engenharia reversa. A atividade do inventor consiste em encontrar uma forma de diferenciar o produto final homogêneo a fim de transformá-lo no bem intermediário de um determinado tipo. Para Barro e Sala-i-Martin (BARRO; SALA-I-MARTIN, 2004), no modelo com expansão da

variedade de produtos isso poderia ser estilizado por meio da colocação de uma etiqueta por um inventor no bem final homogêneo que, a partir daí, passa a ser considerado como uma variedade de bem intermediário.

Como a firma apresenta lucros por causa da tecnologia inventada por seus pesquisadores, podemos dizer que o valor da firma j do setor de bens intermediários é igual ao valor presente descontado dos lucros esperados da produção do bem intermediário j a partir da tecnologia j , o qual é dado por

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(v) \exp\left(-\int_t^v r(w)dw\right) dv \quad (10)$$

onde se permite que a taxa real de juros r varie ao longo do tempo. No equilíbrio, temos que a taxa real de juros é constante. O lucro da firma j no instante v é dado por $\pi_j(v)$. O lucro unitário da firma j no instante v é dado por $[P_j(v) - 1]$, dado que o custo de se tomar uma unidade de produto final e transformá-lo no bem intermediário j é igual a um, o preço do bem final. Essa transformação do bem final para o bem intermediário j , embora tenha custo igual a um, utiliza a tecnologia exclusiva da firma j , e faz com que o preço de venda possa ser superior a um. Multiplicando o lucro unitário por X_j , a oferta total do bem intermediário j , temos o lucro total da firma j no setor de bens intermediários. Supondo o equilíbrio no mercado de bens intermediários, temos a quantidade demandada igual à quantidade ofertada, e por isso X_j pode ser obtido pela soma das quantidades demandadas pelo bem intermediário por parte de todas as firmas que produzem bens finais, isto é, pela soma de (8) para todo i . Daí vem a quantidade total do bem intermediário j no instante v , dada por

$$X_j(v) = L \left(\frac{A\alpha z}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (11)$$

onde L é a oferta de trabalho no setor de bens finais. Tal como no caso da demanda por parte de cada firma individual, temos que a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais leva a uma quantidade demandada de bens intermediários menor para a economia como um todo e, conseqüentemente, a uma quantidade ofertada menor. Conforme ressaltamos anteriormente, esse efeito ocorre porque a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais leva a uma diminuição do produto efetivo de bens finais, o que leva a uma diminuição da demanda pela quantidade efetiva de bens intermediários.

O produto efetivo do setor de bens intermediários é dado pela agregação de (11) para as N firmas, de onde vem, para o instante v , a expressão

$$X(v) = L(A\alpha z)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^N \left(\frac{1}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} dj \quad (11')$$

ou, em termos intensivos, temos

$$x(v) = (A\alpha z)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^N \left(\frac{1}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} dj \quad (11'')$$

Dadas as considerações anteriores, a expressão do lucro para a firma j do setor de bens intermediários no instante v é dada por

$$\pi_j(v) = [P_j(v) - 1] L \left(\frac{A\alpha z}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (12)$$

Conforme mencionamos, o preço do bem intermediário j é dado para o setor de bens finais. No entanto, ele é determinado no setor de bens intermediários, que é de concorrência imperfeita. Escolhe-se um preço P_j que maximize o valor presente dos lucros em (10) ou, em outras palavras, que maximize o valor da firma. O problema da firma do setor de bens intermediários é dado por

$$\max_{P_j} V(t) = \max_{P_j} \int_t^\infty [P_j(v) - 1] L \left(\frac{A\alpha z}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp \left(- \int_t^v r(w) dw \right) dv$$

Derivando a expressão com relação a $P_j(v)$, temos

$$\int_t^\infty \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) L \left(\frac{A\alpha z}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha P_j(v)} - 1 \right] \exp \left(- \int_t^v r(w) dw \right) dv = 0$$

PROPOSIÇÃO 2: A maximização do valor da firma j determina o preço ótimo do bem intermediário j , dado por

$$P_j(v) = P_j = \frac{1}{\alpha} \quad (13)$$

Prova: A partir da expressão

$$\int_t^T \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) L \left(\frac{A\alpha z}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha P_j(v)} - 1 \right] \exp \left(- \int_t^v r(w) dw \right) dv = 0$$

é possível demonstrar o resultado de forma semelhante à prova da Proposição 1, fazendo uma partição do intervalo $[t, T]$ em n sub-intervalos e utilizando indução matemática para provar que a solução proposta é válida inicialmente em um conjunto finito de pontos, o que se estende posteriormente para todo o intervalo. A seguir, generaliza-se o resultado para $T \rightarrow \infty$. \square

Um resultado tradicional da microeconomia é o de que a escolha do preço ótimo por parte de um monopolista produz o resultado de que o preço ótimo é uma margem sobre o custo marginal. A margem, como função da elasticidade-preço da demanda pelo bem intermediário, é dada por

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{|\epsilon(X_j, P_j)|}}$$

Examinando a expressão (11), temos que o valor absoluto da elasticidade-preço da demanda é $\frac{1}{1-\alpha}$. Logo, o preço em (13) é igual à margem, um resultado esperado, dado que o custo marginal é igual a um. Vemos que o preço ótimo é uma constante. É com base nesse preço que o setor de bens finais demanda bens intermediários.

Substituindo o preço ótimo do bem intermediário j em (11) e (12) para obter a quantidade ótima da firma j na produção do bem intermediário j e o lucro máximo da firma j , temos que

$$X(j) = \bar{X}_j = L(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (14)$$

$$\pi(j) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) X(j) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \bar{X}_j = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) L(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (15)$$

Essas expressões caracterizam, para uma dada quantidade de trabalhadores empregados no setor de bens finais, a constância da produção e do lucro da firma no setor de bens intermediários quando o lucro é máximo.

Em termos por trabalhador, a quantidade ótima da firma j na produção do bem intermediário j é dada por

$$\bar{x}_j = (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (14')$$

Pela forma como foi construído o problema, vemos que a firma j do setor de bens intermediários escolhe, dentro de todos os valores presentes de lucros esperados possíveis para o setor e que maximizam os lucros de cada firma do setor de bens finais, um preço que maximiza também o valor presente dos lucros esperados da firma j . Logo, cada uma das firmas da economia maximiza lucros: as do setor de bens finais com lucro zero, e as do setor de bens intermediários com lucro positivo.

Dados o formato da função de produção do setor de bens finais e o custo de produção idêntico de cada um dos bens intermediários, temos que a quantidade produzida de cada bem intermediário será igual à dos demais. Logo, a quantidade agregada de bens intermediários é dada por

$$X = \int_0^N X(j) dj = N\bar{X}_j = NL(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (16)$$

que poderia também ser obtida pela substituição do preço ótimo da Proposição 2 em (11').

O lucro do setor de bens intermediários é dado pela soma do lucro de cada firma, que é uma constante no setor. Logo, temos

$$\Pi = \int_0^N \pi(j) dj = N\pi = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)NL(A\alpha^2z)^{1/(1-\alpha)} \quad (17)$$

Apesar de haver constância da produção e do lucro da firma quando o lucro é máximo, e do lucro de cada firma no setor ser igual ao das demais, as expressões (16) e (17) mostram que a produção e o lucro do setor de bens intermediários cresce com o número de inovações N , uma vez que as inovações elevam o número de firmas no setor. A expressão (17) pode ser expressa como função do produto efetivo por trabalhador do setor de bens intermediários, de onde vem

$$\Pi = L\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x \quad (17')$$

Dado o lucro máximo em (15), temos que o valor ótimo de uma firma é dado por

$$V(t) = \int_t^\infty \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) L(A\alpha^2z)^{1/(1-\alpha)} \exp\left(-\int_t^v r(w)dw\right) dv \quad (18)$$

De (17), podemos inferir que a utilização de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais faz com que o lucro do setor de bens intermediários seja menor. Esse resultado é decorrência do que acontece com a firma individual: a expressão (18) mostra que o valor presente dos lucros esperados de uma firma do setor de bens intermediários diminui com a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais. Ou seja, o valor ótimo da firma diminui. Conforme mencionamos, as tecnologias menos poluentes diminuem o produto efetivo de bens finais, o que diminui a demanda por bens intermediários. Também é interessante ver que o valor ótimo da firma do setor de bens intermediários independe do grau poluidor da tecnologia adotada por ela.

De posse dos valores ótimos, podemos obter o produto agregado de bens finais que maximiza o lucro nos dois setores a partir de (2') e (16). Daí vem

$$Y = NL(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)} \quad (19)$$

ou, na forma intensiva, temos

$$y = N(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)} \quad (19')$$

De posse de (19) podemos reescrever (16) como

$$X = \alpha^2 Y \quad (16')$$

Em termos intensivos, a partir de (14'), vem

$$x = \alpha^2 y = N(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (16'')$$

A expressão (16'') também pode ser obtida de (14'), fazendo $x = N\bar{x}_j$. De acordo com (16') e (16''), a proporção entre bens intermediários e produto é constante no equilíbrio.

A expressão (18) nos dá o valor presente descontado dos lucros resultantes da invenção de um bem intermediário. Como a firma produz somente um bem intermediário, temos que o valor presente dos lucros é igual ao valor da firma. Mas o investimento em P&D somente ocorrerá se o valor presente dos lucros obtidos com a produção e venda do bem intermediário for igual ou superior ao custo da P&D que resultou na nova tecnologia empregada para produzir o bem intermediário. Caso contrário, o número de bens intermediários permanecerá constante. No entanto, se o valor presente dos lucros for maior do que o custo da P&D, ocorrerá a entrada de um número infinito de firmas no setor, o que não é um equilíbrio. Logo, o equilíbrio ocorre com a igualdade entre o valor presente dos lucros e o custo da P&D, o que produz um valor positivo de P&D. Em outros termos, a firma investe um grande montante em P&D, mas consegue cobrir o custo da P&D através da produção e comercialização do bem intermediário, uma atividade que produz um lucro positivo.

Há dois efeitos que atuam sobre o custo da P&D por meio do número de invenções: o primeiro é um impacto negativo das inovações sobre o custo da P&D, pois a descoberta de invenções favorece a P&D de novas invenções; o segundo é um impacto positivo das inovações sobre o custo da P&D, pois as inovações trazem como consequência o fato de que as invenções mais fáceis já foram descobertas, e isso eleva o custo de novas invenções. Como os estudos não afirmam categoricamente se um efeito prevalece sobre o outro, podemos supor que os dois efeitos exatamente se cancelam, ou seja, que o custo da P&D seja constante em η unidades de produto final. Logo, a condição de equilíbrio para o setor de P&D é dada por

$$V(t) = V = \eta \quad (20)$$

A expressão (20) pode ser chamada de condição de entrada livre para as firmas.

Dados (10), (17) e (20), temos que o valor de todas as firmas no setor de bens intermediários é dado por ηN . Logo, a ocorrência de invenções na economia faz com que o valor total das firmas no setor de bens intermediários aumente, embora o valor de cada firma do setor seja constante e igual ao das demais.

Derivando (10), o valor ótimo de uma firma do setor de bens intermediários, com relação ao tempo, e usando a constância dos lucros em (15), vem

$$\dot{V}(t) = -\pi + r(t)V(t)$$

onde π é o lucro constante recebido por uma firma do setor de bens intermediários. Daí vem que

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \quad (21)$$

que mostra a relação entre a taxa real de juros (que remunera títulos), a taxa de lucro (que remunera o investimento em P&D) e a variação do valor da firma (ganhos e perdas de capital). Como, por (20), temos que o valor da firma é constante, o último termo de (21) é nulo, e a taxa real de juros no equilíbrio é constante ($r(t) = r$). Logo

$$r = \frac{\pi}{V} \quad (22)$$

que pode ser obtido substituindo r constante em (10) e utilizando (15). Ou seja, a taxa real de juros no equilíbrio é igual à taxa de lucro da economia. Em outros termos, a remuneração dos títulos e a remuneração dos investimentos em P&D são iguais. Ou, ainda, se o valor da firma fosse aplicado em títulos, eles produziram um rendimento igual ao lucro da firma.

Embora (22) trate da taxa real de juros da economia, ela se refere a variáveis de uma firma típica. Isso só foi possível porque todas as firmas apresentam o mesmo lucro e o mesmo valor. Caso contrário, a taxa real de juros precisa ser calculada para a economia como um todo como

$$r = \frac{\Pi}{N\eta} = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{N}\right) \quad (22')$$

Essa expressão será retomada na análise da dinâmica do consumo em outra seção do texto.

Substituindo (16'') em (22'), obtemos a taxa real de juros de equilíbrio, dada por

$$r = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (23)$$

É interessante notar que a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais exerce um papel sobre a taxa real de juros dos títulos: quanto menor o grau poluidor da tecnologia utilizada no setor de bens finais, menor será a taxa real de juros. As tecnologias adotadas no setor de bens intermediários não exercem nenhuma influência sobre a taxa real de juros. Também pode ser destacado que um aumento do número de trabalhadores empregados no setor de bens finais eleva a taxa real de juros no equilíbrio.

O lucro da firma pode ser visto de outra forma. Substituindo (14) em (15), utilizando (16'), rearranjando a expressão e aplicando (16') novamente, temos

$$\Pi = N\pi = \alpha Y - X \quad (15')$$

que mostra uma expressão para o lucro do setor de bens intermediários e está de acordo com (7) e a discussão subsequente. O lucro é a parcela da renda destinada ao setor de bens

intermediários, descontado o custo da produção dos bens intermediários, e remunera a atividade de P&D.

Tomando (23), multiplicando e dividindo por $\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}$ e usando (19) e (16'), obtemos uma nova expressão para a taxa real de juros dada por

$$r = \left(\frac{1}{\eta N}\right)(\alpha - \alpha^2)Y = \left(\frac{1}{\eta N}\right)(\alpha Y - X) \quad (23')$$

Rearranjando, temos que

$$r\eta N = \alpha Y - X \quad (23'')$$

O lado esquerdo nos dá a taxa real de juros aplicada sobre o valor de todas as firmas no setor de bens intermediários. Conforme discutimos após a obtenção da expressão (7), temos que o lado direito é simplesmente o lucro do setor de bens intermediários. Se aplicarmos o valor de todas as firmas do setor em títulos, deve haver um rendimento igual ao lucro do setor. Outra forma de enxergar (23'') é rearranjando os termos. Daí vem

$$\eta N = \left(\frac{1}{r}\right)(\alpha Y - X)$$

A expressão nos mostra que o valor de todas as firmas do setor de bens intermediários é igual ao valor presente do fluxo perpétuo de lucros do setor de bens intermediários.

Estendendo os resultados da (6') para o setor de bens intermediários, temos

$$\int_0^N P(j)X(j)dj = P_j \bar{X}_j \int_0^N dj = P_j X = \alpha Y$$

Temos que a renda da economia é dividida entre a remuneração do trabalho (fração $(1 - \alpha)$ da renda) e a receita destinada ao setor de bens intermediários (fração α da renda). No setor de bens intermediários, temos a produção de bens a um custo X coberto por meio da receita, e as atividades de P&D, que são remuneradas pelo lucro do setor expresso em (15').

3. Emissões de poluentes

3.1. Equação dinâmica da poluição

Supomos, como em Stokey (STOKEY, 1998), que as emissões de poluentes associadas ao produto potencial per capita de bens finais e de cada um dos bens intermediários obedeçam a funções dadas, respectivamente, por

$$y^p \varphi(z) \quad (24)$$

$$x^p(j)\varphi(z(j)) \quad (25)$$

onde a função de emissões $\varphi(\cdot)$ é estritamente convexa, possuindo as propriedades $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \beta < \infty$ e $\varphi''(0) > 0$. Esse formato mostra que, na presença de tecnologias com um grau poluidor elevado, a adoção de um programa de incentivo ao uso de tecnologias menos poluentes pode resultar em uma redução expressiva de emissões, com um impacto muito maior do que no caso em que o país já adota uma tecnologia com um grau poluidor pequeno.

Supomos inicialmente que cada tipo de variedade tecnológica esteja associado a um tipo de poluente diferente, e que seja possível converter as emissões e os estoques dos diversos tipos de poluentes para um padrão comum de medida através da multiplicação das emissões e estoques de poluentes relativos ao bem intermediário j por um fator de conversão $\mu(j)$, que chamamos de potencial poluidor. Suponha adicionalmente que todos os poluentes sejam transformados no equivalente ao poluente resultante da produção de bens finais. O fator de conversão do poluente relativo à produção de bens finais é, por hipótese, igual a um. A hipótese relativa ao uso de fatores de conversão tem embasamento no mundo real: os diversos gases de efeito estufa possuem potenciais de aquecimento global diferentes, e com base nessa medida as emissões de diversos gases de efeito estufa são convertidas em dióxido de carbono-equivalente. Logo, as emissões das N firmas que produzem as variedades de bens intermediários podem ser convertidas no seu equivalente em termos de emissões dos bens finais através da expressão

$$\int_0^N \mu(j)x^p(j)\varphi(z(j)) dj \quad (26)$$

Usando o resultado de que $z(j)x^p(j) = x(j)$ e $x \equiv \int_0^N x(j)dj$, onde x é a quantidade total de todos os bens intermediários, podemos reescrever (26) como

$$x \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \quad (26')$$

onde $\beta(j) \equiv \left(\frac{x(j)}{x} \right)$ é a parcela de mercado da firma j no produto efetivo do setor de bens intermediários. Pela definição, vemos que a função possui as propriedades $\beta(j) \in [0,1]$ e $\int_0^N \beta(j) dj = 1$. O produto efetivo do setor de bens intermediários x é definido do modo mais geral possível. Nesta seção obtemos expressões válidas nesse contexto mais geral.

No caso particular em que a produção de cada firma é igual à das demais, temos que $x(j) = \left(\frac{x}{N} \right)$, o que leva a $\beta(j) = \left(\frac{1}{N} \right)$. Essa é a solução para o caso em que as firmas maximizam lucro, conforme discutimos nas seções anteriores. A substituição em (26') leva a uma expressão específica para o contexto de maximização de lucros, dada por

$$\left(\frac{x}{N}\right) \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \quad (26'')$$

Aplicando a definição de produto efetivo ao setor de bens finais, temos que as emissões de poluentes associadas ao produto potencial per capita de bens finais são dadas por

$$y \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] \quad (24')$$

Temos que

$$0 < \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] \leq 1$$

pois

$$\lim_{z(j) \rightarrow 0^+} \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] = \lim_{z(j) \rightarrow 0^+} \varphi'(z(j)) = 0$$

pela regra de L'Hôpital, e

$$\lim_{z(j) \rightarrow 1} \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] = \left[\frac{\varphi(1)}{1} \right] = 1$$

É fácil obter que

$$\frac{d}{dz(j)} \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] = \left(\frac{1}{z(j)} \right) \left[\varphi'(z(j)) - \frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] > 0$$

dadas as hipóteses relativas à função $\varphi(\cdot)$. Considerações semelhantes valem para $\left[\frac{\varphi(z)}{z} \right]$.

Com relação à expressão (26'), temos que

$$0 < \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] \leq \mu(j) \leq \mu_{max}$$

onde μ_{max} é o potencial poluidor máximo dentre todos os poluentes do setor de bens intermediários. O potencial poluidor máximo depende das inovações, uma vez que associado a uma invenção pode surgir um novo poluente com potencial poluidor maior do que os existentes. Para o presente modelo consideramos um potencial poluidor máximo constante, a não ser que seja explicitado o contrário.

Temos também que

$$0 < \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \leq \int_0^N \beta(j) \mu(j) dj = \bar{\mu} \leq \mu_{max}$$

onde $\bar{\mu}$ é o potencial poluidor médio dentre todos os poluentes do setor de bens intermediários.

Há dois índices que resumem o impacto das duas dimensões relativas à poluição (grau poluidor da tecnologia e potencial poluidor do poluente). Em primeiro lugar, seja o índice de emissões da firma j do setor de bens intermediários dado por

$$I_{int}(j) \equiv \left[\frac{\mu(j)}{\mu_{max}} \right] \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right]$$

e de uma firma qualquer do setor de bens finais dado por

$$I_f \equiv \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right]$$

onde $I_{int}(j) \in (0,1]$ e $I_f \in (0,1]$. Estes índices são construídos para permanecerem no intervalo $(0,1]$. Quanto mais próximo de zero, menor o índice de emissões e menos poluente é a firma. Considere o exemplo do setor de bens intermediários: se a tecnologia for a mais poluente ($z(j) = 1$) e o poluente tiver o maior potencial poluidor ($\mu(j) = \mu_{max}$), então $I_{int}(j) = 1$. Se a tecnologia for a menos poluente ($z(j) = 0$), então $\lim_{z(j) \rightarrow 0^+} I_{int}(j) = 0$ (aplicando a regra de L'Hôpital).

Em segundo lugar, seja o índice médio de emissões do setor de bens intermediários dado por

$$\bar{I}_{int} \equiv \int_0^N \beta(j) I_{int}(j) dj = \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\mu(j)}{\mu_{max}} \right] \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj$$

onde $\bar{I}_{int} \in (0,1]$. O índice médio de emissões do setor de bens finais é igual ao índice de emissões da firma do setor de bens finais, pois todas as firmas são iguais. Logo

$$\bar{I}_f \equiv \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right]$$

onde $\bar{I}_f \in (0,1]$.

Os índices refletem consistentemente o comportamento das duas dimensões, conforme podemos ver pela taxa de variação do índice da firma j do setor de bens intermediários com relação ao tempo

$$\frac{dI_{int}(j)}{I_{int}(j)} = \frac{d \left\{ \left[\frac{\mu(j)}{\mu_{max}} \right] \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] \right\}}{\left\{ \left[\frac{\mu(j)}{\mu_{max}} \right] \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] \right\}} = \left\{ \left(\frac{\dot{\mu}(j)}{\mu(j)} \right) + \left[\frac{\varphi'(z(j))z(j)}{\varphi(z(j))} - 1 \right] \left(\frac{\dot{z}(j)}{z(j)} \right) \right\}$$

onde, pelas hipóteses com relação à função emissões $\varphi(\cdot)$, temos

$$\frac{\varphi'(z(j))z(j)}{\varphi(z(j))} > 1$$

Da taxa de variação do índice de emissões da firma j , vemos que, no setor de bens intermediários, um aumento do potencial poluidor do poluente ou um aumento do grau poluidor da tecnologia contribuem para um aumento do índice, o que é consistente com as idéias expostas anteriormente. Esse comportamento, aliado à característica de que ele se encontra entre zero e um, faz dos dois tipos de índices de emissões expostos anteriormente medidas fáceis para se avaliar as emissões da firma ou do setor.

De posse dos conceitos discutidos, podemos reescrever (26') como

$$x\mu_{max}\bar{I}_{int}$$

Temos, além das emissões de poluentes decorrentes da produção dos diversos tipos de bens, a absorção de poluentes por meio de processos naturais do meio-ambiente. Supomos uma função de regeneração $R(E)$, que pode assumir um formato linear (STOKEY, 1998), não-linear (BELTRATTI; CHICHILNISKY; HEAL, 1995) ou apresentar um efeito limiar (HANLEY; SHOGREN; WHITE, 1997 e BELTRATTI; CHICHILNISKY; HEAL, 1995).

Supomos adicionalmente que os diversos poluentes sejam do tipo global, onde o estoque é importante e permanece na atmosfera por um certo tempo. Convencionamos que E representa o estoque de poluição da atmosfera e $\dot{E} \equiv \frac{dE}{dt}$ simboliza as emissões líquidas (variação líquida do estoque de poluição) resultantes de emissões \mathcal{E} menos regeneração \mathcal{R} . Utilizando (24') e (26'), podemos escrever as emissões líquidas como

$$\dot{E} = y \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + x \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - R(E) \quad (27)$$

ou

$$\dot{E} = y\bar{I}_f + x\mu_{max}\bar{I}_{int} - R(E) \quad (27')$$

Substituindo (9') em (27), obtemos a expressão final para as emissões líquidas

$$\dot{E} = AN^{1-\alpha}x^\alpha\varphi(z) + x \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - R(E) \quad (28)$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{E} = zAN^{1-\alpha}x^\alpha\bar{I}_f + x\mu_{max}\bar{I}_{int} - R(E) \quad (28')$$

de posse dos índices de emissões discutidos anteriormente.

As emissões líquidas são calculadas como uma soma das emissões das firmas que produzem cada tipo de bem na economia. Enquanto no setor de bens finais consideramos uma função de produção agregada, o que torna desnecessário explicitar o número de firmas, temos que no setor de bens intermediários agregamos as emissões de cada uma das N firmas.

Uma vez que (28) é uma equação diferencial, podemos resolvê-la para obter o comportamento do estoque de poluição ao longo do tempo. Seja uma função de regeneração linear dada por $R(E) = BE$, onde B é uma constante positiva. Multiplicando os dois lados de (28) por $\exp(Bt)$ e integrando para o intervalo de tempo $[0, t]$, temos

$$\begin{aligned}
E(t) &= E(0) \exp(-Bt) \\
&+ \int_0^t \exp[-B(t-v)] \left\{ A(v)N(v)^{1-\alpha}x(v)^\alpha \varphi(z(v)) \right. \\
&+ \left. x(v) \int_0^{N(v)} \beta(j, v) \mu(j, v) \left[\frac{\varphi(z(j, v))}{z(j, v)} \right] dj \right\} dv
\end{aligned} \tag{29}$$

Por (29), temos que a economia parte de um estoque de poluição inicial $E(0)$. A evolução do sistema leva, no longo prazo ($t \rightarrow \infty$), a um estoque de poluição nulo, desde que o termo

$$A(v)N(v)^{1-\alpha}x(v)^\alpha \varphi(z(v)) + x(v) \int_0^{N(v)} \beta(j, v) \mu(j, v) \left[\frac{\varphi(z(j, v))}{z(j, v)} \right] dj$$

apresente uma taxa de crescimento menor do que B no intervalo de tempo $[0, \infty)$.

Para que o estoque de poluição caia a zero no longo prazo, temos que a condição a seguir deve ser satisfeita, a saber

$$\begin{aligned}
\gamma_A(v) + (1 - \alpha)\gamma_N(v) + \alpha\gamma_x(v) + \left[\frac{\varphi'(z(v))z(v)}{\varphi(z(v))} \right] \gamma_z(v) + \gamma_x(v) \\
+ \left\{ \int_0^{N(v)} \beta(j, v) \mu(j, v) \left[\frac{\varphi(z(j, v))}{z(j, v)} \right] dj \right\}^{-1} \left\{ \int_0^{N(v)} \left\{ \gamma_{\beta(j)}(v) + \gamma_{\mu(j)}(v) \right. \right. \\
+ \left. \left. \left[\frac{\varphi'(z(j, v))z(j, v)}{\varphi(z(j, v))} - 1 \right] \gamma_{z(j)}(v) \right\} \beta(j, v) \mu(j, v) \left[\frac{\varphi(z(j, v))}{z(j, v)} \right] dj \right\} \\
+ \left\{ \beta(N(v), v) \mu(N(v), v) \left[\frac{\varphi(z(N(v), v))}{z(N(v), v)} \right] N(v) \right\} \gamma_N(v) \} < B
\end{aligned}$$

onde utilizamos a notação mais compacta $\gamma_a(v)$ para simbolizar a taxa de crescimento da variável a no instante v , com a podendo representar qualquer uma das variáveis do modelo. Essa notação será utilizada novamente em outras partes do trabalho.

A condição acima simplesmente mostra que a taxa de variação do estoque de poluição deve ser negativa se o estoque tende a zero no longo prazo. Não há uma interpretação econômica imediata para ela.

Se, em vez da desigualdade, valer a igualdade na condição acima, então o estoque de poluição será constante. Se a expressão do lado esquerdo for uma constante maior do que B , então teremos uma situação em que o estoque de poluição cresce a uma taxa constante.

Limitamos nossa análise ao caso em que a variação do estoque de poluição ocorre a uma taxa constante $\gamma_E = 0$. A partir de (28), e supondo uma função de regeneração linear, obtemos que no equilíbrio de longo prazo vale

$$\gamma_E = \frac{A \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{x}{N}\right) \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj}{\left(\frac{E}{N}\right)} - B = 0 \quad (28'')$$

que depende de variáveis exógenas (grau poluidor das tecnologias, potencial poluidor dos poluentes, produtividade) e de razões entre variáveis (razão entre produto efetivo do setor de bens intermediários e variedade de produtos, e razão entre estoque de poluição e variedade de produtos). A razão entre produto efetivo do setor de bens intermediários e variedade de produtos é simplesmente o produto de cada firma do setor de bens intermediários no equilíbrio. A expressão (28'') vale no equilíbrio de longo prazo, que em modelos de crescimento recebe a designação especial de estado estacionário. Supusemos implicitamente na análise que, no equilíbrio, temos $\beta(j) = \left(\frac{1}{N}\right)$.

Sabemos que as variáveis N e x crescem à mesma taxa, dado que a produção de cada firma do setor de bens intermediários produz a mesma quantidade, suposta constante. Matematicamente, temos que o primeiro termo à direita da igualdade em (28'') é constante. Dado que A , $\left(\frac{x}{N}\right)$, z , $\mu(j)$ e $z(j)$ são constantes, temos que a constância do termo implica, em um contexto de inovação tecnológica ($\gamma_N > 0$) e emissões líquidas ($\gamma_E > 0$), que

$$\gamma_E = \gamma_N + \frac{\left(\frac{x}{N}\right) \mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)}\right]}{A \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{x}{N}\right) \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj} > \gamma_N$$

Para que γ_E seja uma constante positiva, temos necessariamente que $\gamma_E > \gamma_N$. Esse resultado serve para acomodar a integral em (28'') cujo limite superior depende da variedade de produtos. Quanto maior o potencial poluidor do poluente associado à última inovação, maior será a diferença entre a taxa de emissão γ_E e a taxa de inovação γ_N . Quanto maior o grau poluidor da tecnologia mais recente, maior será a diferença entre a taxa de emissão γ_E e a taxa de inovação γ_N . Temos que a taxa de emissões líquidas no equilíbrio obedece à desigualdade

$$\gamma_E \leq \gamma_N + \frac{\left(\frac{x}{N}\right) \mu_{max}}{A \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{x}{N}\right) \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj}$$

Somente se o número da variedades de produtos for constante (taxa de inovação igual a zero) é que teremos uma taxa de emissões nula e igual à taxa de inovação, o que pode ser inferido a partir de (28''). Logo, para acomodar todos os casos citados, consideramos que $\gamma_E \geq \gamma_N$. No entanto, o caso relevante para o equilíbrio do modelo é o de estado estacionário, onde $\gamma_E = \gamma_N = 0$.

Pela dinâmica das emissões líquidas \dot{E} em (28'), é fácil ver que as emissões E possuem uma cota superior dada por

$$\sup E = y^p + x^p \mu_{max}$$

conhecida como extremo superior, que nos dá a menor das cotas superiores para as emissões (obtido com $z = 1$, $\bar{I}_f = 1$, $\bar{I}_{int} = 1$ e $z(j) = 1, \forall j$). O valor do extremo superior das emissões depende do produto potencial por trabalhador do setor de bens finais, do produto potencial por trabalhador do setor de bens intermediários definido por $x^p \equiv \int_0^N x^p(j) dj$, e do potencial poluidor máximo dos poluentes do setor intermediário.

No equilíbrio com maximização de lucros em todos os setores da economia temos, substituindo as expressões (16'') e (19') em (27), que as emissões líquidas são dadas por

$$\dot{E} = N(A\alpha^{2\alpha} z^\alpha)^{1/(1-\alpha)} \varphi(z) + (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - R(E) \quad (30)$$

dado que $\beta(j) = \left(\frac{1}{N}\right)$ no equilíbrio. A expressão (30) pode também ser reescrita como

$$\dot{E} = N(A\alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)} (\bar{I}_f + \alpha^2 N \mu_{max} \bar{I}_{int}^e) - R(E) \quad (30')$$

Tomando (30'), temos que $N(A\alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)}$ é o produto por trabalhador, \bar{I}_f é o índice médio de emissões no setor de bens finais, α^2 é o fator de conversão de bens finais para bens intermediários (por (16'')), e \bar{I}_{int}^e é o índice médio de emissões do setor de bens intermediários (calculado com $\beta(j) = \left(\frac{1}{N}\right)$) que, multiplicado por $N\mu_{max}$, nos dá as emissões totais do setor de bens intermediários. Não é possível dizer a priori se (30) é positivo ou negativo, pois isso depende do estoque de poluição e do formato da função de regeneração.

Considerando que o equilíbrio relevante para o presente modelo é o estado estacionário onde todas as variáveis são constantes, temos, fazendo $\dot{E} = 0$ em (30), que

$$E = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ N(A\alpha^{2\alpha} z^\alpha)^{1/(1-\alpha)} \varphi(z) + (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \quad (30'')$$

que é o estoque de poluição de longo prazo para a economia. A expressão (30'') possibilita que desenhemos um locus de pontos de equilíbrio para o estoque de poluição, enquanto (30) possibilita que vejamos a dinâmica desse locus. Faremos isso em uma seção futura.

3.2. Emissões e seus determinantes

Vamos a seguir avaliar os efeitos de cada uma das variáveis relevantes sobre as emissões líquidas. Os efeitos serão discutidos a partir de (27) ou (28).

Iniciamos nossa análise com a relação entre emissões líquidas e renda, algo que está no cerne do conceito de curva ambiental de Kuznets. De (27), obtemos

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial y} = \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] = \bar{I}_f > 0 \quad (31)$$

Vemos que há uma relação positiva entre emissões líquidas e produto, o que corresponde ao ramo crescente da curva ambiental de Kuznets característico da fase inicial de desenvolvimento de um país. O aumento do produto gera emissões de poluentes pelo próprio processo produtivo, e também utiliza bens intermediários cuja produção gera poluentes. É possível ver que

$$0 < \frac{\partial \dot{E}}{\partial y} \leq 1$$

Se a tecnologia mais poluidora for utilizada no setor de bens finais, ocorre uma inclinação igual a um. A adoção de uma tecnologia com um grau poluidor menor no setor de bens finais leva a uma redução da derivada. No limite, quando a tecnologia é a menos poluidora, a tecnologia exerce um impacto nulo sobre as emissões líquidas. Note que a eliminação de um poluente j (pela substituição de um bem intermediário associado a esse poluente por um bem intermediário igual mas associado a outro poluente com potencial poluidor menor) é retratada por uma diminuição do potencial poluidor do poluente j associado ao bem intermediário j e não exerce efeito direto sobre a inclinação da relação entre emissões e renda. Note também que não é possível uma inclinação negativa nessa relação, o que impossibilita o ramo negativamente inclinado da curva ambiental de Kuznets.

O impacto de um aumento no total dos bens intermediários x para uma dada variedade de produtos N é equivalente ao impacto de uma mudança em $x(j)$. Daí vem por (28) que

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = \alpha A \left(\frac{x}{N}\right)^{\alpha-1} \varphi(z) + \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj > 0 \quad (32)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = \alpha z A \left(\frac{x}{N}\right)^{\alpha-1} \bar{I}_f + \mu_{max} \bar{I}_{int} > 0 \quad (32')$$

O aumento do total de bens intermediários em cada firma tem como efeito um crescimento das emissões líquidas. Isso ocorre porque a produção de bens intermediários está associada à emissão de poluentes, e porque esses bens intermediários são utilizados para produzir bens finais, o que também emite poluentes. O primeiro termo reflete o impacto poluidor do efeito marginal de um aumento da produção de bens intermediários sobre o produto. O segundo termo resume o impacto de um aumento na produção de bens intermediários por cada firma sobre as emissões do setor de bens intermediários.

Vejamos agora o impacto da adoção de uma tecnologia com menor grau poluidor no setor de bens finais. Temos que levar em conta que há um impacto direto sobre o produto e um impacto indireto sobre a produção de bens intermediários, uma vez que a demanda derivada por bens intermediários sofre influência do grau poluidor da tecnologia empregada no setor de bens finais. Precisamos, portanto, levar em conta a função implícita existente entre a produção de bens intermediários e o grau poluidor da tecnologia no setor de bens

finais, derivada sob a hipótese de maximização de lucros em (16''). A derivada total das emissões líquidas com relação ao grau poluidor da tecnologia do setor de bens finais é dada por

$$\frac{d\dot{E}}{dz} = \frac{\partial \dot{E}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z}$$

onde é necessário usar (32) e

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{x}{z} \right)$$

obtida por (11''). Tomando (28) e usando (32) e a derivada acima, temos que a derivada total das emissões líquidas com relação ao grau poluidor é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{E}}{dz} &= AN^{1-\alpha} x^\alpha \varphi'(z) + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) AN^{1-\alpha} x^\alpha \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{x}{z} \right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \\ &> 0 \end{aligned} \quad (33)$$

A expressão (33) nos mostra que uma redução do grau poluidor da tecnologia no setor de bens finais contribui para diminuir as emissões líquidas. O primeiro termo é o efeito direto, que pode ser interpretado como o impacto do efeito marginal de uma diminuição do grau poluidor da tecnologia sobre as emissões do setor de bens finais. Os demais são efeitos indiretos que refletem o impacto poluidor através da quantidade de bens intermediários: uma redução do grau poluidor diminui a quantidade efetiva de bens intermediários, que por sua vez diminui a produção efetiva de bens finais e as emissões desse setor; e provoca um impacto sobre as emissões do setor de bens intermediários por meio da redução da produção efetiva de bens intermediários.

O impacto da adoção de uma tecnologia com menor grau poluidor no setor de bens intermediários, partindo de (28), é dado por

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial z(j)} = x \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\mu(j)}{z(j)} \right] \left[\varphi'(z(j)) - \frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj > 0 \quad (34)$$

A expressão (34) mostra uma relação positiva entre emissões líquidas e grau poluidor da tecnologia no setor de bens intermediários. Ou seja, a adoção de tecnologias menos poluentes nesse setor contribui para reduzir as emissões líquidas da economia.

O aumento da variedade de N produtos no setor de bens intermediários é consequência da atividade de P&D e contribui, também, para aumentar o número de tipos de poluente. O efeito sobre as emissões líquidas é dado por

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial N} = (1-\alpha) A \left(\frac{x}{N} \right)^\alpha \varphi(z) + x \beta(N) \mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] > 0 \quad (35)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial N} = (1 - \alpha)zA \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha I_f + x\beta(N)\mu_{max}I_{int}(N) > 0 \quad (35')$$

A derivada de (35) é positiva. O primeiro termo reflete o impacto poluidor do efeito marginal de um aumento da variedade de produtos sobre o produto. O segundo termo reflete o efeito de um aumento da variedade de produtos sobre as emissões do setor de bens intermediários. É interessante notar que o impacto pelo lado da produção de bens intermediários leva em conta o efeito marginal da entrada da firma nesse setor sobre as emissões, e não uma média das emissões das firmas do setor.

O efeito da diminuição do potencial poluidor de poluentes gerados no setor de bens intermediários ($\mu(j)$ menor) sobre as emissões líquidas é dado por

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial \mu(j)} = x \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj > 0 \quad (36)$$

De acordo com (36), a eliminação das emissões de um poluente, substituindo-o por outro poluente com potencial poluidor menor, leva a uma diminuição das emissões líquidas. É fácil ver que a magnitude da derivada parcial é menor que x .

Um aumento da produtividade A provoca um aumento das emissões líquidas. No entanto, há um efeito direto sobre a produção de bens finais e um efeito indireto sobre a produção de bens intermediários por meio da demanda derivada por bens intermediários. A derivada total precisa levar em conta os dois efeitos, fazendo

$$\frac{d\dot{E}}{dA} = \frac{\partial \dot{E}}{\partial A} + \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A}$$

Para isso, temos que usar (32) e (11''), que nos mostra que

$$\frac{\partial x}{\partial A} = \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{x}{A} \right)$$

Substituindo, temos que a derivada total é dada por

$$\frac{d\dot{E}}{dA} = N^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) N^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{x}{A} \right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj > 0 \quad (37)$$

O aumento da produtividade age diretamente através do aumento do produto, conforme o primeiro termo. O segundo termo capta o efeito indireto, quando o aumento da produtividade eleva a quantidade de produtos intermediários, aumentando o produto e, conseqüentemente, as emissões do setor de bens finais. O terceiro termo leva em conta outro efeito indireto, em que um aumento da produtividade eleva a quantidade de bens intermediários, o que eleva as emissões do setor de bens intermediários.

Podemos resumir os principais resultados acerca do comportamento das emissões líquidas. Tomando a equação que governa as emissões líquidas, temos que estas aumentam se

houver uma elevação: do produto, da produção de bens intermediários, do grau poluidor das tecnologias, da variedade de produtos, do potencial poluidor dos poluentes e da produtividade.

Políticas públicas que procurem diminuir as emissões de poluentes devem levar em conta que o país deve crescer, expandir a variedade de produtos e aumentar a produtividade ao longo do tempo, o que eleva as emissões. Logo, as políticas públicas devem atuar nos demais itens, diminuindo o grau poluidor das tecnologias e o potencial poluidor dos poluentes. Seguem alguns exemplos de política pública:

- proibir a emissão de poluentes com alto potencial poluidor;
- incentivar economicamente a substituição de bens intermediários associados a poluentes com alto potencial poluidor por bens iguais associados a poluentes com potencial poluidor menor;
- incentivar o uso de tecnologias com um grau poluidor menor em todos os setores;
- implementar leis que forcem o tratamento de poluentes de modo que seu potencial poluidor seja reduzido.

As sugestões de políticas públicas devem ser consideradas como provisórias ao longo do texto. Após a exposição completa do modelo, as discussões serão retomadas com mais propriedade e qualificadas no que for necessário.

3.3. Análise da dinâmica da poluição

Uma análise completa da dinâmica relacionada ao estoque de poluição precisa considerar como se comporta a curva (28) no caso de um estoque de poluição que cresce a uma taxa constante igual a zero e, a seguir, como varia o estoque para cada mudança nas variáveis relevantes. A mesma análise poderia ser feita por meio de (30"). Suponha que a função de regeneração seja a mais simples, linear, dada por $R(E) = BE$, onde B é uma constante positiva. Fazendo $\gamma_E = 0$, a curva $\dot{E} = \gamma_E E = 0$, onde as emissões líquidas variam à taxa constante $\gamma_E = 0$, é dada por

$$E = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ AN^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + x \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \quad (38)$$

que pode também ser reescrita como

$$E = \left(\frac{1}{B}\right) (zAN^{1-\alpha} x^\alpha \bar{I}_f + x \mu_{max} \bar{I}_{int}) \quad (38')$$

Em (38') aproveitamos os conceitos de índice médio de emissões para os dois setores, o que proporciona um formato mais conciso para a expressão. A curva pode também ser chamada de curva iso-poluição, uma vez que em qualquer ponto da curva temos um estoque de poluição constante, isto é, emissões líquidas que crescem à taxa constante $\gamma_E = 0$. Por isso é que o estoque de poluição não varia ao longo da curva, garantindo que as emissões líquidas

sejam nulas. Isso caracteriza o estado estacionário da economia. Embora nossa análise possa ser aplicada para uma taxa de crescimento constante arbitrária, o relevante para o presente modelo é a constância do estoque de poluição no equilíbrio de longo prazo, o que será explorado quando tratarmos da resolução do modelo.

Outra forma de enxergar (38) é reescrever (28'') como

$$\left(\frac{E}{N}\right) = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ A \left(\frac{x}{N}\right)^\alpha \varphi(z) + \left(\frac{x}{N}\right) \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj \right\} \quad (38'')$$

No equilíbrio, temos que as variáveis x e N crescem à mesma taxa. Conforme discutimos anteriormente na obtenção de (28''), temos que $\gamma_E = \gamma_N = \gamma_x = 0$ no estado estacionário. Supomos implicitamente que no estado estacionário o grau poluidor da tecnologia, o potencial poluidor do poluente e a parcela da firma j no setor sejam constantes.

O comportamento da curva (38) pode ser avaliado por meio de derivadas parciais semelhantes às de (28). O estoque de poluição varia positivamente com o produto, a produtividade, a quantidade de bens intermediários, a utilização de uma tecnologia com maior grau poluidor, a maior variedade de produtos e o maior potencial poluidor dos poluentes. Podemos dizer que $\dot{E} = 0$ produz uma função $E = E(y, A, x, z, z(j), N)$, onde $E_y > 0$, $E_A > 0$, $E_x > 0$, $E_z > 0$, $E_{z(j)} > 0$, $E_N > 0$ e $E_{\mu(j)} > 0$. A derivada parcial do estoque de poluição com relação a uma variável é dada pela constante positiva $\left(\frac{1}{B}\right)$ multiplicada pela derivada das emissões com relação à variável de interesse. Dado que na seção anterior verificamos as derivadas parciais das emissões com relação às variáveis relevantes, podemos aproveitar todos os resultados aqui, simplesmente multiplicando os mesmos pela constante $\left(\frac{1}{B}\right)$.

Para desenhar um locus de pontos de equilíbrio $\dot{E} = 0$, tomamos as expressões (30) e (30'') em que os valores de equilíbrio já foram substituídos e supomos uma função regeneração linear. Daí vem

$$\dot{E} = N(A\alpha^2\alpha z^\alpha)^{1/(1-\alpha)}\varphi(z) + (A\alpha^2z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj - BE \quad (39)$$

com $B > 0$. Dada essa função, analisamos o formato da curva.

Temos que, na curva $\dot{E} = 0$, a derivada parcial do estoque de poluentes com relação à variedade de produtos N é dada por

$$\frac{\partial E}{\partial N} = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ (A\alpha^2\alpha z^\alpha)^{1/(1-\alpha)}\varphi(z) + (A\alpha^2z)^{1/(1-\alpha)}\mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)}\right] \right\} > 0$$

Podemos ver que a segunda derivada com relação a N é nula, uma vez que o segundo termo da derivada não é uma função da variedade de produtos, mas sim um valor das variáveis para um dado N . Logo, o locus de pontos $\dot{E} = 0$ é linear. Por (39), vemos que, para $N = 0$, temos $E = 0$, logo a relação linear parte da origem no plano estoque de poluição-

variedade de produtos. A dinâmica associada a pontos fora da curva de equilíbrio pode ser estudada a partir da expressão (39). A relação entre emissões e variedades de produtos no caso particular em que $\dot{E} = 0$ está retratada na Figura 1.

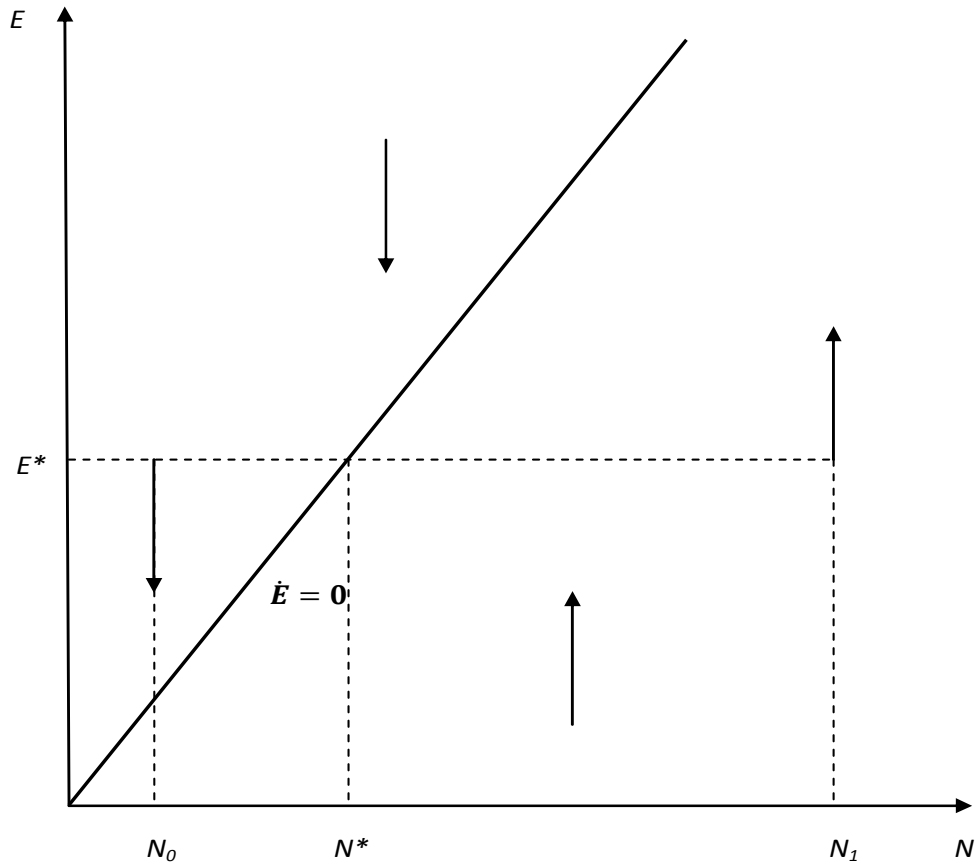


FIGURA 1 - Equilíbrio do estoque de poluição

As setas podem ser obtidas facilmente. O ponto (E^*, N^*) está sobre a curva de equilíbrio do estoque de poluição $\dot{E} = 0$. Aumentando a variedade de produtos para N_1 , mas mantendo o estoque de poluição constante em E^* , podemos ver por (39) que isto produz um aumento do estoque de poluição e, por isso, a seta aponta para cima. Partindo novamente do ponto de equilíbrio (E^*, N^*) e diminuindo a variedade de produtos para N_0 , mas mantendo o estoque de poluição constante em E^* , temos por (39) que isso produz uma diminuição do estoque de poluição e, por isso, a seta aponta para baixo. Conseqüentemente, pontos acima de $\dot{E} = 0$ apresentam uma diminuição do estoque de poluição, enquanto pontos abaixo de $\dot{E} = 0$ apresentam um aumento do estoque de poluição. O gráfico mostra que a ocorrência de choques que levam a economia para fora do equilíbrio do estoque de poluição encontra uma

dinâmica que conduz a economia de volta para a curva de equilíbrio. No entanto, esta conclusão é parcial, dado que precisamos ver as demais equações dinâmicas da economia.

Ilustramos a seguir os efeitos de algumas variáveis sobre a curva $\dot{E} = 0$.

3.4. Impacto da existência de múltiplos poluentes sobre a poluição

Precisamos considerar qual o efeito da inclusão de múltiplos poluentes com potencial poluidor diferente sobre a curva $\dot{E} = \gamma_E E$ em (38). Isso exerce influência sobre o termo

$$\int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \quad (40)$$

Para isso, consideremos inicialmente o caso em que só existe um tipo de poluente. Isso faz com que $\mu(j) = 1, \forall j$. Com isso, a expressão passa a ser

$$\int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \quad (41)$$

Temos que

$$0 < \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] \leq 1$$

Logo, a expressão (41) com certeza é menor do que um, pois

$$\int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj < \int_0^N \beta(j) dj = 1$$

A introdução de novos poluentes faz com que apareça o termo $\mu(j)$, como ocorre em (40). Supomos, sem perda de generalidade, que a introdução de novos poluentes se dê para poluentes com potencial poluidor mais elevado do que o poluente do setor de bens finais (em que $\mu = 1$ por hipótese). Ou seja, $\mu(j) > 1, \forall j, j \in [0, N]$. Como exemplo, citamos o caso dos gases de efeito estufa: dado o dióxido de carbono como referência, temos que cada gás diferente apresenta um potencial de aquecimento global maior.

É imediato que

$$\int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj < \int_0^N \beta(j) \mu(j) dj = \bar{\mu}$$

O termo $\bar{\mu}$ é o potencial médio de poluição dos poluentes gerados no setor de bens intermediários, que com certeza é maior do que um. Não podemos dizer a priori que o termo à esquerda da desigualdade é maior do que um. Mas, dadas as hipóteses, podemos afirmar que

$$\int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj < \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \quad (42)$$

Em termos intuitivos, examinando o formato da curva $\dot{E} = 0$ em (39), retratada na Figura 1, podemos afirmar que a inclusão de novos poluentes com maior potencial poluidor faz com que essa curva se desloque para cima em relação à curva com um único poluente. No entanto, esse deslocamento não é paralelo. Há uma diferença na inclinação da curva, como pode ser visto ao tomar a derivada correspondente em (39). Como a curva continua partindo da origem no eixo estoque de poluição-variedade de produtos, podemos concluir que houve um deslocamento proporcional da curva para cima. Esse movimento está representado na Figura 2 para o caso em que $\dot{E} = 0$.

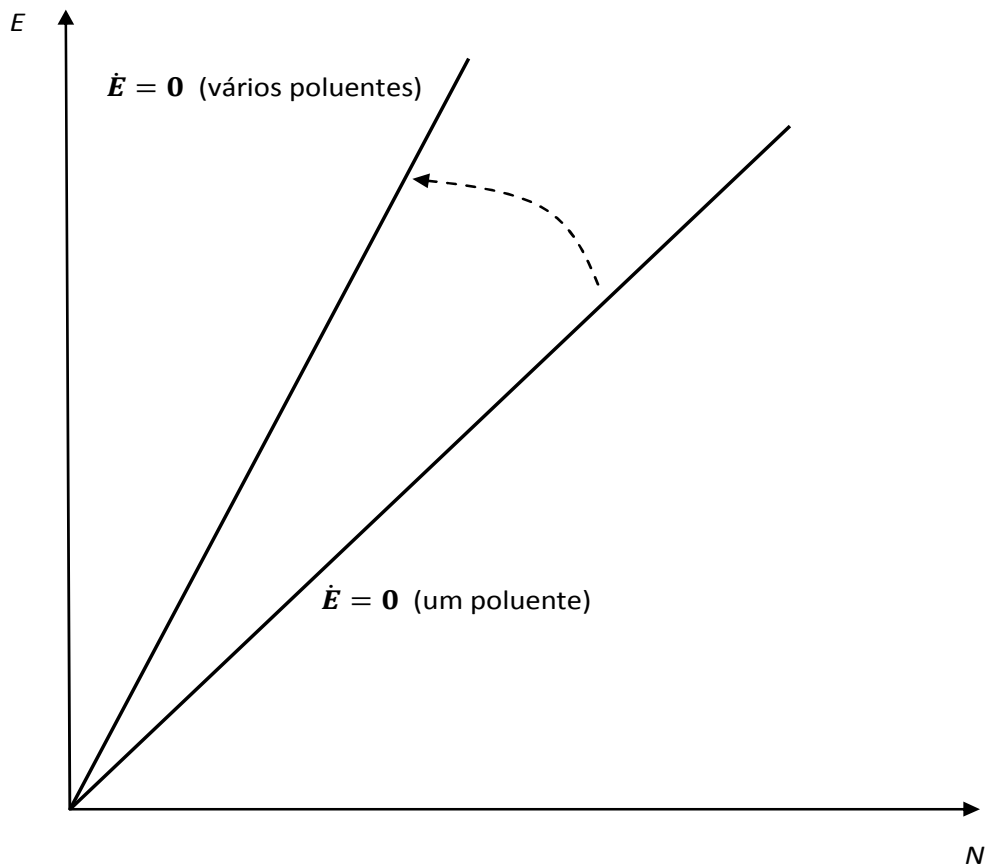


FIGURA 2 - Impacto da existência de poluentes com potenciais diferentes

Podemos examinar o efeito de outros fatores sobre a posição da curva $\dot{E} = 0$ na mesma Figura. O uso de tecnologias com grau poluidor menor em qualquer um dos setores desloca a curva para baixo proporcionalmente. O aumento da produtividade A desloca a curva para cima proporcionalmente.

Um exercício semelhante aos anteriores pode ser feito pela análise de políticas públicas com base no presente modelo. O primeiro caso é o da implementação de leis que forcem o tratamento de poluentes de modo que seu potencial poluidor seja reduzido. Essa política pública é semelhante ao que ocorre na Figura 2, mas no sentido contrário: o resultado da medida é um deslocamento proporcional da curva $\dot{E} = 0$ para baixo, de modo que haverá um estoque de poluição menor para qualquer número dado de variedades de produtos.

Outra política pública que produz uma rotação da curva para baixo é o incentivo econômico para a substituição de bens intermediários associados a poluentes com alto potencial poluidor por bens iguais associados a poluentes com potencial poluidor menor.

Um acordo ambiental que incentiva a adoção de tecnologias menos poluentes desloca a curva $\dot{E} = 0$ para baixo por meio de uma rotação. Um exemplo desse tipo de acordo é o Protocolo de Quioto, em que a adoção de tecnologias que emitem menos gases de efeito estufa pode, por exemplo, ser feita por meio do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (MDL).

Um acordo ambiental que proíbe a emissão de poluentes com alto potencial poluidor é o Protocolo de Montreal, destinado à redução de emissões de substâncias que afetam a camada de ozônio do planeta. Dentro desse acordo, a produção e o uso de diversas substâncias foi descontinuada. Uma exposição didática do Protocolo de Montreal e sua comparação com o Protocolo de Quioto está em Barret (BARRET, 1999).

Como o equilíbrio em modelos de crescimento é dado pelo estado estacionário, temos que qualquer curva em que a taxa de variação seja constante e igual a zero pode, a princípio, sinalizar pontos onde haja equilíbrio de longo prazo. No entanto, se considerássemos o caso de taxa de variação constante não nula do estoque de poluição, a representação gráfica ficaria prejudicada, uma vez que a economia se deslocaria sobre a curva ao longo do tempo. Além disso, uma taxa de crescimento não nula para as variáveis impossibilitaria um equilíbrio de longo prazo na economia, como mencionaremos posteriormente. Aprofundaremos a análise do equilíbrio ao completarmos o desenvolvimento do modelo.

3.5. Efeitos no equilíbrio do estoque de poluição

Nesta seção consideramos a possibilidade de verificar se no modelo predomina o efeito escala descrito por Grossman (GROSSMAN, 1995) ou se há algum viés relativo à introdução da variedade de produtos ou à introdução de tecnologias menos poluentes ou de diversos tipos de poluentes. Veremos que a discussão é bem mais rica do que a presente em Stokey (STOKEY, 1998), onde só apareciam o efeito escala e o efeito técnica em uma economia com um setor.

Tomando (9') e substituindo em (38), temos que

$$E = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ y \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + x \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \quad (43)$$

A expressão mostra qual deve ser o estoque de poluição para que as emissões líquidas apresentem uma taxa de variação $\gamma_E = 0$.

Se o efeito escala predomina em uma economia qualquer, então a elasticidade do estoque de poluição com relação à renda, representada por $\epsilon(E, y) \equiv \frac{y}{E} \frac{dE}{dy} = \frac{\left(\frac{dE}{E}\right)}{\left(\frac{dy}{y}\right)}$, é igual a um. Ou seja, a variação percentual do estoque de poluição é igual à variação percentual da renda. Ou, em outros termos, a taxa de emissões é igual à taxa de variação da renda. Se a elasticidade não for igual a um, haverá uma diferença que podemos chamar de viés. O viés reflete o efeito líquido da presença de bens intermediários, tecnologias menos poluentes nos diversos setores, variedades de produtos e múltiplos poluentes.

A elasticidade acima, que chamaremos doravante de elasticidade-renda da poluição, é dada por

$$\epsilon(E, y) = \frac{\left(\frac{1}{B}\right) y \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]}{\left(\frac{1}{B}\right) \left\{ y \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right] + x \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj \right\}} \quad (44)$$

e pode ser simplificada para

$$\epsilon(E, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj} \quad (45)$$

É fácil ver que a elasticidade é positiva mas menor que um, ou seja, a variação percentual do estoque de poluição é menor que a variação percentual do produto. Existe um viés para redução da taxa de emissões em relação à taxa de variação do produto que é inerente ao modelo. Ou, em outras palavras, um viés para a diminuição da razão entre estoque de poluição e produto. Para constatar se o viés se deve à presença dos fatores mencionados, basta fazermos $\alpha = 0$ em (9') e $z = 1$, o que leva a $x = 0$ e implica uma elasticidade unitária em (45), onde está presente somente o efeito escala. A elasticidade independe da taxa constante γ_E à qual as emissões líquidas crescem (no caso, supusemos $\gamma_E = 0$).

Um resultado interessante em (45) ocorre se todos os setores utilizarem uma tecnologia com grau poluidor idêntico ($z = z(j), \forall j$). Daí vem

$$\epsilon(E, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) dj} \quad (45')$$

Nesse contexto, a elasticidade-renda da poluição independe do grau poluidor da tecnologia utilizada. Ocorre um impacto sobre a elasticidade somente se setores diferentes utilizarem tecnologias com grau poluidor diferente. Esse resultado depende da hipótese implícita de que a função de emissões é idêntica em todos os setores.

Retomando a expressão (45), podemos desmembrar os efeitos correspondentes a cada elemento a partir da expressão do viés dada por

$$Viés = \epsilon(E, y) - 1 = - \frac{\left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj}{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj} \quad (46)$$

O viés é negativo e aponta para uma redução da razão entre estoque de poluição e produto.

Partindo do conceito de viés, podemos escrever

$$\epsilon(E, y) = 1 + Viés \quad (47)$$

onde 1 representa o efeito escala e o viés pode ser para redução ou aumento do estoque de poluição. Como a elasticidade em (45) mostra claramente, o viés nesta economia é negativo, isto é, se dá no sentido de redução do estoque de poluição em relação ao produto. Mas o viés representa o resultado líquido de todos os efeitos presentes na economia. Por isso vamos usar uma decomposição, no espírito da utilizada por Grossman (GROSSMAN, 1995), com o fito de separar quais efeitos favorecem o viés para redução e quais prejudicam esse viés. Os resultados de cada efeito, obviamente, dependem do modelo proposto. Vamos a seguir fazer uma pequena digressão a fim de chegar à decomposição que utilizaremos no restante da seção.

A elasticidade $\epsilon(E, y)$ retratada em (45) representa o impacto do produto sobre o estoque de poluição em uma economia com tecnologias menos poluentes, diversos poluentes e a existência de dois setores. Vamos considerar no que segue elasticidades-renda da poluição que ocorrem em contextos econômicos mais simples.

O contexto mais simples de todos é uma economia com a tecnologia mais poluente, um único poluente e a existência de um só setor (bens finais). Nesse caso, como vimos acima, a elasticidade é igual a um, pois somente existe o efeito escala.

Considere agora as seguintes definições e, a seguir de cada uma, a explicitação do contexto econômico ao qual se aplica. Para cada uma das definições representamos as emissões por um símbolo específico, com o propósito de indicar que as emissões se referem àquele contexto econômico específico.

A elasticidade $\epsilon(E_c, y)$ é dada por

$$\epsilon(E_c, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)} \quad (48)$$

A elasticidade $\epsilon(E_c, y)$ representa o impacto do produto sobre o estoque de poluição E_c em uma economia com a tecnologia mais poluente, um único poluente e a existência de dois setores (bens finais e bens intermediários). Neste contexto, como vimos, o produto efetivo de cada setor é igual ao produto potencial.

A elasticidade $\epsilon(E_{ti}, y)$ é dada por

$$\epsilon(E_{ti}, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj} \quad (49)$$

A elasticidade $\epsilon(E_{ti}, y)$ representa o impacto do produto sobre o estoque de poluição E_{ti} em uma economia com tecnologias com menor grau poluidor no setor de bens intermediários, um único poluente e a existência de dois setores (bens finais e bens intermediários).

A elasticidade $\epsilon(E_t, y)$ é dada por

$$\epsilon(E_t, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj} \quad (50)$$

A elasticidade $\epsilon(E_t, y)$ representa o impacto do produto sobre o estoque de poluição E_t em uma economia com tecnologias com menor grau poluidor em todos os setores, um único poluente e a existência de dois setores (bens finais e bens intermediários).

O contexto econômico mais amplo se dá na elasticidade $\epsilon(E, y)$ em (45), que representa o impacto do produto sobre o estoque de poluição E em uma economia com tecnologias com menor grau poluidor em todos os setores, múltiplos poluentes com potenciais poluidores diferentes e a existência de dois setores (bens finais e bens intermediários).

Partimos agora para fazer uma decomposição no espírito da que foi idealizada por Grossman (GROSSMAN, 1995). Seja a decomposição dada por

$$E = \left(\frac{E}{E_t}\right) \left(\frac{E_t}{E_{ti}}\right) \left(\frac{E_{ti}}{E_c}\right) \left(\frac{E_c}{Y}\right) Y$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados, temos

$$\ln(E) = [\ln(E) - \ln(E_t)] + [\ln(E_t) - \ln(E_{ti})] + [\ln(E_{ti}) - \ln(E_c)] + [\ln(E_c) - \ln(Y)] + \ln(Y)$$

Aplicando o diferencial na expressão, vem

$$\left(\frac{dE}{E}\right) = \left[\left(\frac{dE}{E}\right) - \left(\frac{dE_t}{E_t}\right)\right] + \left[\left(\frac{dE_t}{E_t}\right) - \left(\frac{dE_{ti}}{E_{ti}}\right)\right] + \left[\left(\frac{dE_{ti}}{E_{ti}}\right) - \left(\frac{dE_c}{E_c}\right)\right] + \left[\left(\frac{dE_c}{E_c}\right) - \left(\frac{dY}{Y}\right)\right] + \left(\frac{dY}{Y}\right)$$

Dividindo ambos os lados por $\left(\frac{dY}{Y}\right)$ e rearranjando, vem

$$\left[\frac{\left(\frac{dE}{E}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} - 1 \right] = \left[\frac{\left(\frac{dE}{E}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} - \frac{\left(\frac{dE_t}{E_t}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} \right] + \left[\frac{\left(\frac{dE_t}{E_t}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} - \frac{\left(\frac{dE_{ti}}{E_{ti}}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} \right] + \left[\frac{\left(\frac{dE_{ti}}{E_{ti}}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} - \frac{\left(\frac{dE_c}{E_c}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} \right] + \left[\frac{\left(\frac{dE_c}{E_c}\right)}{\left(\frac{dY}{Y}\right)} - 1 \right]$$

Substituindo as definições de elasticidade vistas anteriormente, vem

$$[\epsilon(E, y) - 1] = [\epsilon(E, y) - \epsilon(E_t, y)] + [\epsilon(E_t, y) - \epsilon(E_{ti}, y)] + [\epsilon(E_{ti}, y) - \epsilon(E_c, y)] + [\epsilon(E_c, y) - 1]$$

De posse da definição de viés em (46), obtemos a seguinte decomposição que será utilizada a seguir

$$Viés = [\epsilon(E, y) - \epsilon(E_t, y)] + [\epsilon(E_t, y) - \epsilon(E_{ti}, y)] + [\epsilon(E_{ti}, y) - \epsilon(E_c, y)] + [\epsilon(E_c, y) - 1] \quad (51)$$

onde o viés é decomposto nos quatro efeitos descritos a seguir.

O primeiro efeito é semelhante ao que Grossman (GROSSMAN, 1995) chama de *efeito composição*. Corresponde ao último termo de (51). Representa a passagem de uma economia com um setor para uma economia com dois setores, onde as demais características são iguais: um único poluente e uso da tecnologia mais poluente. Essa mudança de um para dois setores atua como Grossman define o efeito composição: altera-se a composição do produto na economia, que antes produzia somente bens finais e depois passou a produzir também bens intermediários. O efeito composição no presente modelo é dado por

$$\epsilon(E_c, y) - 1 = - \frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)} \quad (52)$$

O efeito composição possui um sinal negativo e atua no mesmo sentido do viés para redução do estoque de poluição em relação ao produto. Em outras palavras, há uma diminuição da taxa de emissões em relação à taxa de variação da renda. A partir do momento em que a economia se encontra em equilíbrio, temos por (16'') que a proporção entre bens intermediários e bens finais permanece constante, ou seja, a proporção entre setores não muda e não ocorre mais o efeito composição em outras etapas da análise.

O segundo efeito é o *efeito técnica no setor de bens intermediários* e corresponde ao penúltimo termo em (51). Representa a passagem de uma economia com dois setores, um único poluente e uso das tecnologias mais poluentes para outra em que a única mudança ocorre pela adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens intermediários. Esse efeito é dado por

$$\epsilon(E_{ti}, y) - \epsilon(E_c, y) = \frac{\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ 1 - \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{x}{y}\right) \right\}} \quad (53)$$

A discussão que se segue à expressão (24') mostra que o termo no numerador é positivo, pois se $z(j) < 1$ para algum $j, j \in [0, N]$, então temos

$$\int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj < 1$$

e daí concluímos que o efeito técnica no setor de bens intermediários é positivo, atuando para aumentar a razão entre estoque de poluição e produto. Isso atenua o viés para redução do estoque de poluição presente nessa economia.

O terceiro efeito é o *efeito técnica no setor de bens finais*. Corresponde ao segundo termo à direita da igualdade em (51). Representa a passagem de uma economia com dois setores, um único poluente e uso da tecnologia menos poluente somente no setor de bens intermediários para outra em que o setor de bens finais passa também a adotar tecnologias menos poluentes. Esse efeito é dado por

$$\epsilon(E_t, y) - \epsilon(E_{ti}, y) = \frac{\left\{ \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\}} \quad (54)$$

A discussão que se segue à expressão (24') mostra que o termo no numerador é negativo, pois

$$0 < \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] \leq 1$$

e daí concluímos que o efeito técnica no setor de bens finais é negativo. Esse resultado opera no mesmo sentido do viés e contribui favoravelmente para a redução do estoque de poluição em relação ao produto. Isso equivale a dizer que a taxa de emissões diminui em relação à taxa de variação da renda. Examinando (9') e (38), vemos que o estoque de poluição e a renda caíram. O efeito da elasticidade mostra que o estoque de poluição caiu mais que a renda.

A explicação para o efeito técnica no setor de bens finais foi dada nas seções referentes aos setores de bens finais e bens intermediários. A introdução de tecnologias com menor grau poluidor faz com que o produto efetivo de bens finais diminua. As novas tecnologias também levam a uma diminuição da demanda por bens intermediários, o que reflete até mesmo no lucro desse setor. Há um impacto negativo sobre a produção de bens finais e de bens intermediários, o que poderia ser usado, por exemplo, como argumento para a não adesão a um acordo ambiental. No entanto, o resultado nos mostra que o impacto negativo sobre a taxa de emissões é maior do que o impacto negativo sobre o produto. O efeito técnica no setor de bens finais é negativo e atua no mesmo sentido do viés para redução do estoque de poluição. Esse resultado é semelhante ao efeito técnica mostrado em Grossman (GROSSMAN, 1995) e apresenta o mesmo sinal.

Uma questão que pode ser levantada é se a adoção de tecnologias menos poluentes em todos os setores teria um efeito líquido positivo ou negativo. Para isso, basta avaliar o sinal do efeito técnica em todos os setores, dado por

$$\epsilon(E_t, y) - \epsilon(E_c, y) = \frac{\left(\frac{x}{y} \right) \left[\frac{z}{\varphi(z)} \right] \left\{ \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] - \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \right\}} \quad (55)$$

Da discussão anterior, é fácil verificar que o sinal do numerador é ambíguo. Não é possível, portanto, afirmar a priori se o efeito técnica aplicado a todos os setores contribui para reduzir ou aumentar o estoque de poluição. Se o índice médio de emissões do setor de bens finais for maior do que o índice médio de emissões do setor de bens intermediários, dado o contexto de um único poluente, então o efeito total é positivo. Caso contrário, o efeito total é negativo.

O quarto efeito é o *efeito potencial poluidor*. Corresponde ao primeiro termo à direita da igualdade em (51). Representa a passagem de uma economia com dois setores, um único poluente e uso de uma tecnologia com grau poluidor menor em todos os setores para uma economia com diversos poluentes, cada um deles com um potencial poluidor distinto. Esse efeito é dado por

$$\begin{aligned} & \epsilon(E, y) - \epsilon(E_t, y) \\ &= \frac{\left(\frac{x}{y}\right) \left[\frac{z}{\varphi(z)}\right] \left\{ \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj - \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj \right\}} \end{aligned} \quad (56)$$

onde a aplicação do resultado em (42) mostra que o numerador e o efeito como um todo são negativos, atuando no sentido de redução do estoque de poluição em relação ao produto. Supomos implicitamente que o que distingue um poluente em relação a outro é seu potencial poluidor.

A discussão acima mostra que o efeito total do produto sobre o estoque de poluição em uma economia com dois setores, variedade de produtos, tecnologias menos poluentes e diversos poluentes não se resume ao efeito escala. Há um viés no sentido de redução do estoque de poluição. Desmembrando esse viés, podemos dizer que o efeito composição, o efeito técnica no setor de bens finais e o efeito potencial poluidor atuam na redução do estoque de poluição em relação ao produto. O efeito técnica no setor de bens intermediários impacta no sentido de aumentar o estoque de poluição em relação ao produto, mas no presente contexto não consegue compensar os efeitos que atuam no sentido contrário. O efeito técnica no setor de bens finais, presente em Grossman (GROSSMAN, 1995), apresentou o mesmo sinal. Esta é uma decomposição que procura captar o efeito de cada modificação na estrutura do modelo sobre a elasticidade-renda do estoque de poluição, e deve ser interpretada como um indicador do sentido dos efeitos. Os resultados desta seção mostram que existe a possibilidade de ocorrência da curva ambiental de Kuznets, uma vez que o viés já é negativo. A implementação de políticas públicas adequadas pode reforçá-lo e, em tese, levar a uma diminuição do estoque de poluição, fazendo surgir o ramo negativamente inclinado da curva. No entanto, os resultados expostos aqui não apontam inequivocamente para a possibilidade de uma curva ambiental de Kuznets com o ramo negativamente inclinado.

3.6. Formalização dos efeitos

A seção anterior mostrou quatro efeitos e seus sinais no modelo. Uma derivação formal a partir da fórmula de elasticidade-renda da poluição em (45) comprova o sinal de cada efeito mostrado anteriormente. A derivação também permite mostrar efeitos não enfocados na

seção anterior. A importância dessa elasticidade se dá também por revelar o comportamento da razão entre estoque de poluição e produto. Daí é possível inferir o formato da curva ambiental de Kuznets para uma economia em crescimento. Sabemos das discussões anteriores que o modelo apresenta um viés para redução do estoque de poluição em relação ao produto. As análises a seguir comparam o impacto da mudança em uma variável sobre a razão entre poluição e produto comparativamente à trajetória inicial dada pelo modelo.

Podemos examinar o efeito de um aumento da renda sobre a elasticidade-renda do produto. A derivada é dada por

$$\frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial y} = \frac{\left(\frac{x}{y^2}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj}{\left\{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj\right\}^2} > 0 \quad (57)$$

O crescimento econômico leva a um aumento da renda, que produz uma redução do viés e um aumento da razão entre estoque de poluição e produto em relação à situação inicial. Como a situação inicial do modelo é de queda da razão entre estoque de poluição e produto, o desenvolvimento do país faz com que a queda se dê a uma velocidade menor. Quanto mais desenvolvido um país, mais próxima está a elasticidade de um, tudo o mais constante.

O *efeito composição* é dado pela derivada da elasticidade-renda da poluição com relação ao produto efetivo do setor de bens intermediários (x). Como $x = \int_0^N x(j) dj$, supomos que a variação de x se dê por meio da variação de $x(j)$, e não de N . O impacto sobre as emissões leva em conta um efeito direto do produto efetivo do setor de bens intermediários sobre as emissões e um efeito indireto do produto efetivo do setor de bens intermediários sobre o produto efetivo de bens finais e deste, por sua vez, sobre as emissões. Levando em conta a existência de todos os efeitos, temos que a análise da elasticidade deve considerar a derivada total dada por

$$\frac{d\epsilon(E, y)}{dx} = \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

onde, por (9'), temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha \left(\frac{y}{x}\right)$$

Levando em conta (57) e os resultados acima, temos que é possível obter o efeito composição. Daí vem a derivada total

$$\frac{d\epsilon(E, y)}{dx} = - \frac{(1 - \alpha) \left(\frac{1}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj}{\left\{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj\right\}^2} < 0 \quad (58)$$

O efeito mostra que um aumento do produto efetivo do setor de bens intermediários faz com que a razão entre estoque de poluição e produto diminua em relação à situação inicial, à medida que o setor de bens intermediários apresenta um produto efetivo maior. Se a situação inicial aponta uma queda da razão entre estoque de poluição e produto à medida que o país se desenvolve, então um produto efetivo maior do setor de bens intermediários faz com que a queda se dê a uma velocidade maior. Logo, neste modelo o efeito composição é negativo.

O *efeito técnica no setor de bens intermediários* consiste na derivada da elasticidade-renda da poluição com relação ao grau poluidor da tecnologia nesse setor. Ele é dado por

$$\frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial z(j)} = - \frac{\left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{z}{\varphi(z)}\right] \left[\frac{1}{z(j)}\right] \left[\varphi'(z(j)) - \frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj}{\left\{1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)}\right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj\right\}^2} < 0 \quad (59)$$

Temos que a adoção de tecnologias com grau poluidor menor no setor de bens intermediários leva a um aumento da razão entre estoque de poluição e produto em relação à situação inicial, sinal contrário ao do viés do modelo. Isso ocorre porque a redução do grau poluidor provoca, para um dado produto efetivo do setor de bens intermediários, um aumento do produto potencial no setor de bens intermediários e, conseqüentemente, um fluxo maior de emissões (pois as emissões dependem do produto potencial). O produto potencial aumenta para que o setor continue a obter o mesmo produto efetivo. Paralelamente a isso, não há qualquer efeito sobre o produto efetivo do setor de bens finais. Esse raciocínio justifica a ocorrência da elevação da razão entre estoque de poluição e produto na presença da adoção de tecnologias com menor grau poluidor no setor de bens intermediários em relação à situação inicial. Se a situação inicial aponta para uma queda da razão entre estoque de poluição e produto à medida que o país se desenvolve, então a adoção de tecnologias com grau poluidor menor no setor de bens intermediários faz com que a queda ocorra a uma velocidade menor.

O *efeito técnica no setor de bens finais* é representado pela derivada da elasticidade-renda da poluição com relação ao grau poluidor da tecnologia nesse setor. Temos um efeito direto e um efeito indireto. Logo

$$\frac{d\epsilon(E, y)}{dz} = \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$$

onde

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \left(\frac{y}{z}\right)$$

por (9'). De posse de (57) e das expressões acima, podemos calcular a derivada total da elasticidade-renda da poluição em relação ao grau poluidor da tecnologia no setor de bens finais. Logo, o efeito técnica no setor de bens finais é dado por

$$\frac{d\epsilon(E, y)}{dz} = \frac{\left[\frac{\varphi'(z)z}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{1}{z} \right) \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj \right\}^2} > 0 \quad (60)$$

A adoção de tecnologias com grau poluidor menor no setor de bens finais faz com que a razão entre estoque de poluição e produto diminua em relação à situação inicial. Esse efeito se dá no mesmo sentido do viés. Se a situação inicial aponta para uma queda da razão entre estoque de poluição e produto efetivo à medida que o país se desenvolve, então a adoção de tecnologias com grau poluidor menor no setor de bens finais faz com que a queda ocorra a uma velocidade maior.

O *efeito potencial poluidor* é dado pela derivada da elasticidade-renda da poluição com relação ao potencial poluidor. Logo

$$\frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial \mu(j)} = - \frac{\left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y} \right) \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)} \right) dj \right\}^2} < 0 \quad (61)$$

O efeito de múltiplos poluentes com potenciais poluidores distintos (que, por hipótese, são maiores que o potencial poluidor do setor de bens finais) implica uma redução da razão entre estoque de poluição e produto em relação à situação inicial. A situação inicial aponta para uma queda da razão entre estoque de poluição e produto efetivo à medida que o país se desenvolve. A ocorrência de múltiplos poluentes com potenciais poluidores distintos faz com que a queda ocorra a uma velocidade maior. Não há uma explicação intuitiva para este efeito na mecânica do modelo. No mundo real, este efeito poderia simbolizar o despertar das pessoas para questões ambientais devido ao surgimento de novos poluentes. Isso faria com que a população buscasse formas de se desenvolver com menos danos ao meio ambiente

Pode ser considerado, também, o *efeito variedade de produtos*, dado pela derivada da elasticidade-renda da poluição com relação ao número de tipos de bens intermediários. É preciso considerar o efeito direto e o efeito indireto através do produto efetivo de bens intermediários, pois $x \equiv \int_0^N x(j) dj$. Logo

$$\frac{d\epsilon(E, y)}{dN} = \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial N} + \left[\frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon(E, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right] \frac{\partial x}{\partial N}$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial N} = x(N)$$

temos, utilizando (58), que

$$\begin{aligned}
& \frac{d\epsilon(E, y)}{dN} \\
&= - \frac{\left(\frac{1}{y}\right) \left\{ x\beta(N)\mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(N)}\right) + (1-\alpha)x(N) \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{x}{y}\right) \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{\varphi(z)} \right] \left(\frac{z}{z(j)}\right) dj \right\}^2} \\
&< 0
\end{aligned} \tag{62}$$

onde a primeira expressão é o efeito direto sobre as emissões e a segunda é o efeito indireto sobre o produto efetivo de bens intermediários, o qual possui um impacto sobre as emissões e sobre o produto efetivo de bens finais, que então influi sobre as emissões. De acordo com esse efeito, um aumento da variedade do produto leva a uma diminuição da razão entre estoque de poluição e produto em relação à situação inicial. Se a situação inicial aponta para uma queda da razão entre estoque de poluição e produto à medida que o país se desenvolve, então a maior variedade de produtos faz com que a queda ocorra a uma velocidade maior.

O crescimento de um país acompanhado de mudanças em outras variáveis pode produzir um efeito ambíguo sobre a razão entre estoque de poluição e produto. Por isso, a curva ambiental de Kuznets no plano estoque de poluição-produto em um país em desenvolvimento pode eventualmente apresentar uma ramo negativamente inclinado, desde que haja um fomento a inovações no setor de bens intermediários, um aumento da produção total no setor de bens intermediários e uma utilização de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais.

4. Dinâmica dos ativos

Conforme vimos na seção 2, o valor de todas as firmas no setor de bens intermediários é dado por ηN . O total de ativos na economia (La) é dado pelo valor ótimo das firmas do setor de bens intermediários ηN menos a dívida líquida privada B_p . Supomos que as duas formas de ativos sejam substitutas perfeitas como reserva de valor, logo ambas são remuneradas pela taxa real de juros r . Podemos definir, em termos intensivos, os ativos por trabalhador como $a \equiv \left(\frac{\eta}{L}\right) N - b_p$, onde $b_p > 0$ para o indivíduo que em termos líquidos é devedor e $b_p < 0$ para o indivíduo que em termos líquidos é credor. Logo, a acumulação de ativos por trabalhador, dadas as hipóteses de número de trabalhadores constante e custo de P&D constante, é definida como $\dot{a} \equiv \left(\frac{\eta}{L}\right) \dot{N} - \dot{b}_p$.

De posse das considerações anteriores, a dinâmica dos ativos da economia é dada por

$$C + L\dot{a} = wL + rLa \tag{63}$$

que mostra os usos (consumo e investimento em ativos) e os fundos (salários e retorno dos ativos) da economia. Podemos reescrever (63) em termos por trabalhador, o que produz a equação de dinâmica para um indivíduo representativo

$$\dot{a} - ra = (w - c) \quad (63')$$

Essa expressão é uma equação diferencial, que pode ser resolvida. Para chegarmos à solução, suponhamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) \exp\left(-\int_0^t r(w)dw\right) \geq 0$$

ou seja, os ativos de cada indivíduo representativo devem crescer ao longo do tempo a uma taxa menor ou igual à taxa real de juros. Essa é a condição técnica para ausência de jogos do tipo Ponzi. Ela garante que não é possível para um indivíduo tomar um empréstimo e contrair novos empréstimos para pagar os juros indefinidamente. Como os ativos englobam dívida líquida e o valor das firmas obtido pela P&D, temos que o indivíduo não pode tomar dívidas em montante maior do que seu patrimônio em termos de firmas, ou seja, nesta economia descarta-se a possibilidade de insolvência. Na prática, consideramos a condição valendo por meio da igualdade.

A solução de (63'), dada a hipótese de ausência de jogos do tipo Ponzi, é

$$\int_0^{\infty} c(t) \exp\left(-\int_0^t r(w)dw\right) dt = h(0) + a(0) \quad (64)$$

onde

$$h(0) \equiv \int_0^{\infty} w(t) \exp\left(-\int_0^t r(w)dw\right) dt$$

é a riqueza humana e $a(0)$ é a riqueza não humana. Nessa terminologia seguimos Blanchard e Fischer (BLANCHARD; FISCHER, 1989). A riqueza humana é o valor presente descontado de todos os recebimentos de salários reais ao longo da vida infinita do indivíduo. A riqueza não humana do período inicial consiste nos ativos da economia, que englobam o valor das firmas existentes e das dívidas privadas no período inicial, expressas em termos por trabalhador. A soma da riqueza humana com a riqueza não humana é chamada de riqueza total. A expressão (64) mostra que o valor presente descontado dos gastos de consumo de um indivíduo representativo no instante inicial é igual à riqueza total inicial.

Como vimos anteriormente, o valor das firmas nos ativos corresponde ao valor presente descontado dos lucros que cada invenção relacionada ao produto de uma firma pode auferir devido à patente perpétua dada ao inventor. Há uma hipótese implícita de que as firmas são propriedade de todos os indivíduos (por meio do investimento em fundos mútuos, por exemplo), e esse é o motivo pelo qual as firmas aparecem como parte da riqueza do indivíduo representativo. Os lucros auferidos pelo setor de bens intermediários através da

atividade em P&D são distribuídos aos cotistas dos fundos mútuos, que são remunerados à taxa r pelo montante investido. Este é o motivo pelo qual a remuneração dos ativos, entre eles as atividades de P&D, aparece como um dos fundos para o indivíduo representativo. Como a produção de bens finais não produz lucros, temos que ela aparece apenas indiretamente através da remuneração do trabalho empregado por meio de salários reais.

A hipótese de vida infinita utilizada aqui vem do modelo de Ramsey e representa, de forma estilizada (juntamente com a hipótese de constância do número de trabalhadores), um indivíduo que se preocupa com seu filho. O filho seria a continuação do pai, pois o primeiro passa a existir como trabalhador no momento em que o último deixa de trabalhar e morre. A expressão (64) poderá ser simplificada ainda mais quando chegarmos à taxa de crescimento do consumo no equilíbrio de longo prazo, um ponto que será retomado em outra seção.

No equilíbrio de longo prazo, temos que a dívida privada do indivíduo representativo deve ser igual a zero. É fácil ver que uma dívida positiva não pode caracterizar uma situação de equilíbrio. Supõe-se, portanto, que todos os ajustes à capacidade produtiva que seriam feitos por meio do endividamento já foram feitos até o longo prazo, e que por isso não seja necessária nenhuma dívida adicional. Assim, a dinâmica dos ativos passa a ser dada no longo prazo por

$$C + \eta\dot{N} = wL + r\eta N \quad (65)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\eta}{L}\right)\dot{N} - r\left(\frac{\eta}{L}\right)N = (w - c) \quad (65')$$

Por (5''') e (23''), podemos reescrever a dinâmica dos ativos em (65) como

$$\eta\dot{N} = Y - C - X \quad (66)$$

que pode ser reescrita em termos intensivos como

$$\left(\frac{\eta}{L}\right)\dot{N} = (y - c - x) \quad (66')$$

Substituindo (9'), temos

$$\left(\frac{\eta}{L}\right)\dot{N} = (zAN^{1-\alpha}x^\alpha - c - x) \quad (67)$$

Substituindo (16'') em (66'), temos que, no equilíbrio, vale

$$\dot{N} = \left(\frac{L}{\eta}\right)[(1 - \alpha^2)y - c]$$

ou seja, no equilíbrio a propensão marginal a poupar é igual a α^2 . Substituindo o produto por trabalhador por (19'), vem

$$\dot{N} = \left(\frac{L}{\eta}\right) [(1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)}N - c] \quad (68)$$

Colocando (68) em termos de taxa de crescimento da variedade de produtos, temos

$$\gamma_N = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left[(1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)} - \left(\frac{c}{N}\right) \right] \quad (69)$$

Por (69), vemos que o equilíbrio de longo prazo se dá com a variedade de produtos (igual ao número de firmas) se expandindo à mesma taxa de crescimento do consumo por trabalhador, a qual por sua vez é igual à taxa de crescimento do consumo, dada a hipótese de trabalho constante. Ou seja, usando a notação de taxas de crescimento e retomando os resultados obtidos anteriormente, temos que no equilíbrio de longo prazo (estado estacionário) deve valer $\gamma_E = \gamma_N = \gamma_c = \gamma_x = 0$. Conforme discutimos anteriormente, a igualdade entre a taxa de variação do estoque de poluição e as taxas de variação das demais variáveis só ocorre se estivermos em um equilíbrio em que todas as variáveis sejam constantes (ou seja, um estado estacionário em sua forma estrita, conhecido em inglês como *stationary state*, em vez do conceito mais amplo de *steady state*).

Dentro do conceito de estado estacionário com variáveis constantes no equilíbrio, temos por (69) que $\dot{N} = 0$ implica uma razão de equilíbrio entre consumo por trabalhador e variedade de produtos dada por

$$\left(\frac{c}{N}\right) = (1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)}$$

que é uma constante. Ou seja, $\dot{N} = 0$ pode ser representada por

$$c = (1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)}N \quad (70)$$

Pode-se encontrar um locus de pontos de equilíbrio de longo prazo onde não ocorre a expansão da variedade de produtos. Ele é dado por (70), que mostra uma relação linear entre consumo e variedade de produtos. Colocamos a curva $\dot{N} = 0$ em um gráfico no plano consumo-variedade de produtos (Figura 3). Podemos resumir a curva $\dot{N} = 0$ pela função $c = c(A, z, N)$, onde valem as derivadas parciais $c_A > 0$, $c_z > 0$ e $c_N > 0$. Daí vemos que a curva $\dot{N} = 0$ se desloca proporcionalmente para cima quando ocorre uma elevação da produtividade ou quando ocorre a adoção de uma tecnologia mais poluente.

A dinâmica é fácil de ser analisada a partir da Figura 3 e das expressões anteriores. Tomemos o ponto (c^*, N^*) sobre a curva, onde $\dot{N} = 0$. Nesse ponto vale (70). Se mantivermos a variedade de produtos constante em N^* e aumentarmos o consumo para c_0 , então é possível ver por (68) que em (c_0, N^*) vale $\dot{N} < 0$. Se partirmos novamente de (c^*, N^*) , onde vale (70), e diminuirmos o consumo para c_1 , mantendo a variedade de produtos constante em N^* , podemos ver por (68) que em (c_1, N^*) vale $\dot{N} > 0$. Daí o sentido das setas

presentes na Figura 3, onde pontos abaixo da curva $\dot{N} = 0$ apresentam um aumento da variedade de produtos, e pontos acima da curva $\dot{N} = 0$ apresentam uma diminuição da variedade de produtos.

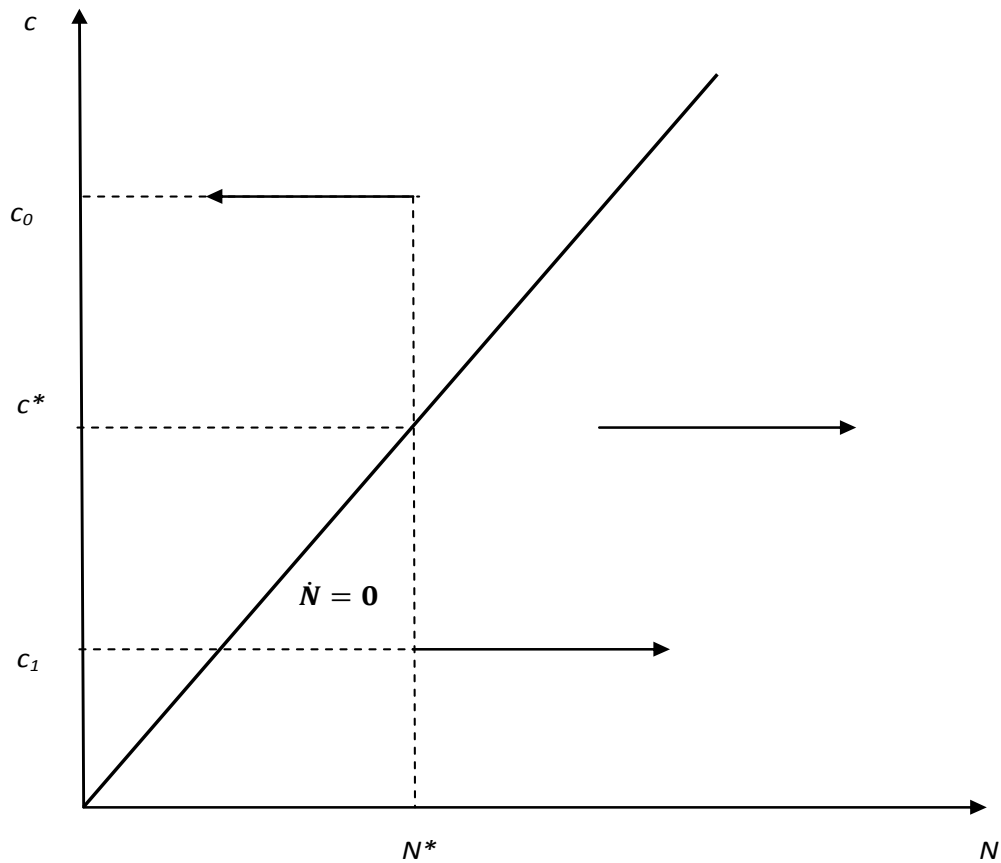


FIGURA 3 - Equilíbrio da variedade de produtos

5. Comportamento dos indivíduos

Consideramos um indivíduo representativo. O tamanho da população é constante. O horizonte de tempo considerado é infinito, pois supomos que as pessoas vivem para sempre.

O bem-estar de cada indivíduo depende de duas variáveis: consumo por trabalhador e estoque de poluição. Seja o bem-estar da população representado de forma geral pelo valor presente descontado das utilidades futuras, de modo que

$$U = \int_0^{\infty} \vartheta(c, E) \cdot \exp(-\rho t) dt \quad (71)$$

onde $\vartheta(c, E)$ é a utilidade instantânea e $\rho > 0$ é a taxa subjetiva de desconto.

A taxa subjetiva de desconto ρ revela duas facetas do indivíduo na economia. Por um lado, ela revela a impaciência do indivíduo em relação ao consumo. Quanto maior a taxa subjetiva, maior a impaciência do indivíduo e mais ele concentrará seu consumo nos instantes iniciais. Por outro lado, a mesma taxa também revela a intolerância do indivíduo com relação à poluição no curto prazo. Quanto maior a taxa subjetiva, maior será a rejeição do indivíduo à poluição no curto prazo, o que pode levar a um aumento da poluição no futuro a fim de que seu efeito negativo sobre o bem-estar seja pequeno. Portanto, a taxa subjetiva de desconto mostra o dilema entre as duas forças descritas.

A utilidade instantânea depende do consumo por trabalhador c e do estoque de poluição E . Note que, pela natureza do poluente, temos que o estoque de poluição aparece em sua totalidade na função utilidade instantânea, em vez das emissões líquidas. Por exemplo, se o aquecimento global depende do estoque de gases de efeito estufa e não do fluxo de emissões, então o bem-estar vai depender do estoque de gases. A função utilidade instantânea $\vartheta(c, E)$ possui as propriedades usuais: $\vartheta_c(c, E) > 0$, $\vartheta_{cc}(c, E) < 0$, $\vartheta_E(c, E) < 0$, $\vartheta_{EE}(c, E) < 0$ e $\vartheta_{cE}(c, E) < 0$. Supomos também que valem as condições de Inada, a saber $\lim_{c \rightarrow 0} \vartheta_c(c, E) = \infty$ e $\lim_{c \rightarrow \infty} \vartheta_c(c, E) = 0$, além das condições $\lim_{E \rightarrow 0} \vartheta_E(c, E) = 0$ e $\lim_{E \rightarrow \infty} \vartheta_E(c, E) = -\infty$. As diferenças nas derivadas da função utilidade instantânea vêm da natureza da variável considerada, pois o consumo por trabalhador c refere-se a bens e o estoque de poluição E refere-se a males.

Um exemplo de função com essas propriedades é a especificação do tipo CRRA (função com aversão relativa ao risco constante) dada por

$$\vartheta(c, E) = \frac{\left(\frac{c}{E}\right)^{1-\delta} - 1}{1-\delta}$$

com $\delta > 2$. É possível verificar facilmente que essa função utilidade instantânea apresenta as propriedades mencionadas acima. Em particular, temos que a curva de indiferença depende da razão entre consumo por trabalhador e estoque de poluição. Temos também que a declividade da curva de indiferença é dada por $\left(\frac{c}{E}\right)$, dependendo apenas da razão entre consumo por trabalhador e estoque de poluição. É interessante notar que nessa função utilidade existe uma interação entre consumo e poluição, pois um aumento do consumo por trabalhador para um determinado estoque de poluição produz um acréscimo de utilidade menor do que o mesmo incremento de consumo por trabalhador em um contexto com um estoque de poluição menor.

É possível simplificar um pouco a análise acima supondo que a utilidade instantânea $\vartheta(c, E)$ tenha a forma aditiva separável dada por $\vartheta(c, E) = u(c) - h(E)$. A função é dita aditiva separável quando os efeitos de cada variável relevante para o problema podem ser separados em funções distintas que dependem, cada uma, de apenas uma das variáveis. Daí vem, para a função utilidade instantânea do modelo em foco, que

$$U = \int_0^{\infty} [u(c) - h(E)]. \exp(-\rho t) dt \quad (71')$$

onde $u(c)$ e $h(E)$ representam funções utilidade instantânea. As propriedades das funções utilidade instantânea são as usuais: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$, $h'(E) > 0$ e $h''(E) > 0$. Supomos adicionalmente que valem as condições de Inada para a função utilidade do consumo, com $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$ e $\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0$, e que a função utilidade da poluição tenha as propriedades $\lim_{E \rightarrow 0} h'(E) = 0$ e $\lim_{E \rightarrow \infty} h'(E) = \infty$. Ao assumir uma função aditiva separável, supomos implicitamente que o consumo de um dos fatores não altera o consumo do outro. Um exemplo deste tipo de função é dado em Stokey (STOKEY, 1998), que particulariza as funções utilidade instantânea aditivas separáveis com especificações do tipo CRRA, resultando em

$$u(c) = \frac{c^{1-\delta} - 1}{1 - \delta}$$

$$h(E) = \frac{E^{\xi}}{\xi}$$

com $\delta > 0$ e $\xi > 1$. Neste caso, a declividade da curva de indiferença é dada por $c^{\delta} E^{\xi-1}$.

A diferença entre este exemplo e o exemplo anterior é que no caso mais geral podemos ter consumo e poluição crescendo à mesma taxa constante de modo que a razão seja constante, mantendo a mesma declividade. Ou, para o modelo deste trabalho, se houver uma taxa de inovação positiva, ocorre uma queda ao longo do tempo da declividade da curva de indiferença, uma vez que a poluição cresce a uma taxa maior que a inovação. No exemplo do caso mais restrito das funções aditivas separáveis, temos que o crescimento contínuo das variáveis consumo e poluição faz com que a declividade da curva de indiferença cresça continuamente. Ambas as classes de funções apresentam, dessa forma, comportamentos distintos, exceto no caso em que a taxa de inovação é nula. Essa diferença pode ser importante em um contexto onde as variáveis no equilíbrio de longo prazo crescem a uma taxa constante. No caso em que as variáveis do modelo permanecem constantes em estado estacionário, temos que as funções gerais e as funções aditivas separáveis apresentam comportamentos compatíveis. O estado estacionário no sentido estrito é o conceito de equilíbrio relevante para o presente modelo.

Nesta seção vamos considerar uma economia descentralizada em que cada agente toma decisões motivado por incentivos econômicos, e a seguir avaliamos os resultados. Posteriormente faremos a resolução para o caso de uma economia centralizada com um planejador central que é onisciente e, por isso, toma decisões que maximizam o bem-estar da

população (planejador benevolente). A diferença entre ambos os casos está na determinação da quantidade de bens produzidos no setor de bens intermediários. No caso descentralizado, as firmas determinam a quantidade ótima de bens intermediários com base na maximização de lucros de todas as firmas. No caso centralizado, a determinação da quantidade ótima é feita por um planejador central que conhece todos os detalhes da economia, inclusive as imperfeições dos mercados e as externalidades. Passamos agora a focar o contexto da economia descentralizada.

A dinâmica da poluição é dada por

$$\dot{E} = AN^{1-\alpha}x^\alpha\varphi(z) + x \int_0^N \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - BE \quad (72)$$

onde tomamos (28) e supusemos uma função de regeneração linear. Como enfatizamos o papel dos ativos por trabalhador a no contexto descentralizado, reescrevemos a expressão (72) utilizando a definição para ativos por trabalhador, de onde vem $N \equiv \left(\frac{L}{\eta}\right)(a + b_p)$. Isso produz

$$\dot{E} = A \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} (a + b_p)^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + x \int_0^{\left(\frac{L}{\eta}\right)(a+b_p)} \beta(j)\mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - BE \quad (72')$$

A dinâmica dos ativos é dada por

$$\dot{a} = ra + (w - c) \quad (73)$$

que é obtida a partir de (63').

6. Resumo do capítulo

Neste capítulo procuramos discutir todos os blocos que formam um modelo de crescimento com expansão da variedade de produtos na presença da poluição e de tecnologias menos poluentes. A poluição considerada é aquela cujos efeitos se dissipam lentamente. Para isso examinamos inicialmente os setores de bens finais, bens intermediários e P&D. Supusemos que o setor de P&D está inserido dentro do setor de bens intermediários. Também modelamos o setor de bens intermediários de forma estilizada, com base em uma demanda derivada de bens por parte do setor de bens finais. O setor de bens finais reflete o contexto de concorrência perfeita e o setor de bens intermediários apresenta concorrência imperfeita e lucro positivo. Mostramos como é o equilíbrio em que todas as firmas da economia maximizam seus lucros. A seguir discutimos como se inserem as emissões no modelo. A discussão sobre os ativos da economia é seguida da modelagem do bem-estar em um contexto com um poluente que se dissipa lentamente. No próximo capítulo discutimos como utilizar os diversos blocos na obtenção de uma solução de longo prazo. Procuraremos analisar o

equilíbrio no contexto descentralizado e, a seguir, em uma economia centralizada com um planejador onisciente. Isso fornecerá a base para a discussão de políticas que minimizem os efeitos da poluição e da concorrência imperfeita na economia, levando-a para a solução centralizada.

3

TECNOLOGIA MENOS POLUENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO – SOLUÇÃO DO MODELO COM EXPANSÃO DA VARIEDADE DE PRODUTOS

No capítulo anterior procuramos estruturar todos os blocos do modelo. Neste capítulo procuramos usar a estrutura exposta com detalhe anteriormente para analisar o equilíbrio do modelo em dois contextos: uma economia descentralizada e uma economia centralizada com um planejador onisciente.

1. Solução para a economia descentralizada

O problema na ótica descentralizada consiste em maximizar o bem-estar

$$U = \int_0^{\infty} \vartheta(c, E) \cdot \exp(-\rho t) dt$$

sujeito às restrições relativas à dinâmica da poluição e à dinâmica dos ativos

$$\dot{E} = A \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} (a + b_p)^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + x \int_0^{\left(\frac{L}{\eta}\right)^{(a+b_p)}} \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj - BE$$

e

$$\dot{a} = ra + (w - c)$$

em um contexto onde há maximização de lucros por parte das firmas. São dados no problema os valores iniciais $a_0 \equiv a(0) > 0$ e $E_0 \equiv E(0) > 0$.

Neste problema as variáveis de estado são a e E . As variáveis de co-estado correspondentes são, respectivamente, ν e λ . Os ativos (que englobam a variedade de produtos) e o estoque de poluentes refletem o ambiente da economia no qual serão tomadas as decisões com o objetivo de maximizar lucros, e as variedades de co-estado são os preços sombra correspondentes. Os preços sombra ν e λ são expressos em valor corrente e traduzem o impacto de uma unidade marginal do ativo e da poluição, respectivamente, em termos de utilidade. Supomos que a única variável de controle é o consumo por trabalhador c . As outras possíveis candidatas, a saber o grau poluidor da tecnologia em cada setor (dados por z e $z(j)$) e o potencial poluidor de um dado poluente (dado por $\mu(j)$) são, por hipótese, constantes. A

solução no caso em que essas variáveis aparecessem como variáveis de controle seria trivial, com as tecnologias menos poluentes sendo utilizadas e o produto efetivo igual a zero. Após a obtenção da solução de equilíbrio de longo prazo, onde apenas o consumo por trabalhador é variável de controle, é possível avaliar qual o efeito da mudança em cada uma das variáveis mantidas constantes sobre o equilíbrio, analisando também a trajetória de ajuste.

O hamiltoniano a valor presente é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(c, a, E, v, \lambda) = & \left\{ \vartheta(c(t), E(t)) + v(t)[r(t)a(t) + (w(t) - c(t))] \right. \\ & - \lambda(t) \left\{ A(t) \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} (a(t) + b_p(t))^{1-\alpha} x(t)^\alpha \varphi(z(t)) \right. \\ & \left. \left. + x(t) \int_0^{\left(\frac{L}{\eta}\right)(a(t)+b_p(t))} \beta(j, t) \mu(j, t) \left[\frac{\varphi(z(j, t))}{z(j, t)} \right] dj - BE(t) \right\} \right\} \exp(-\rho t) \end{aligned} \quad (74)$$

O hamiltoniano é uma medida do produto (consumo mais investimento) em termos de utilidade *menos* o impacto sobre o meio ambiente representado pelas emissões líquidas (DASGUPTA, 1995). Este ponto será retomado na análise do preço sombra da poluição em termos de bens, o qual será definido posteriormente. A definição serve para tornar o preço sombra da poluição positivo e para sinalizar adequadamente o papel das externalidades negativas sobre o bem-estar da economia.

A seguir obtemos e analisamos as condições de primeira ordem para a economia descentralizada.

1.1. Condições de primeira ordem

As condições de primeira ordem para maximização da utilidade obtidas a partir do hamiltoniano são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= 0 \\ \frac{d[\lambda(t) \exp(-\rho t)]}{dt} &= -\mathcal{H}_E \\ \frac{d[v(t) \exp(-\rho t)]}{dt} &= -\mathcal{H}_a \end{aligned}$$

além das condições de transversalidade e das restrições dinâmicas da variedade de produtos e das emissões líquidas. Supomos implicitamente que o consumo seja positivo.

As condições de primeira ordem obtidas por meio de (74) produzem os seguintes resultados

$$\vartheta_c(c(t), E(t)) = v(t) \quad (75)$$

$$\dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = -\vartheta_E(c(t), E(t)) - B\lambda(t) \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) - \rho v(t) = & -v(t)r(t) + \lambda(t)(1 - \alpha)A(t) \left(\frac{L}{\eta}\right) \left[\frac{x(t)}{N(t)}\right]^\alpha \varphi(z(t)) \\ & + \lambda(t) \left(\frac{L}{\eta}\right) x(t)\beta(N(t), t)\mu(N(t), t) \left[\frac{\varphi(z(N(t), t))}{z(N(t), t)}\right] \end{aligned} \quad (77)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)\lambda(t) \exp(-\rho t) = 0 \quad (78)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)v(t) \exp(-\rho t) = 0 \quad (79)$$

A expressão (75) é uma condição de primeira ordem relativa à variável de controle. As expressões (76)-(77) são condições de primeira ordem relativas às variáveis de estado. As expressões (78)-(79) são condições de transversalidade para as variáveis de estado. A expressão (77) foi obtida pela substituição da definição de variedade de produtos após concluída a derivação.

1.2. Interpretação das condições

A interpretação das expressões (75)-(79) não é de modo algum óbvia. Por isso, procuraremos esclarecer o sentido das mesmas a seguir.

1.2.1. Condição para a variável de controle

Vamos agora examinar a condição de primeira ordem com relação à variável de controle. A expressão (75) significa que a alocação ótima do produto entre consumo por trabalhador e investimento em ativos por trabalhador deve se dar para que o impacto sobre a utilidade seja igual em qualquer uma das alternativas. Em outras palavras, não há incentivo em diminuir o consumo por trabalhador e aumentar o investimento em ativos por trabalhador, ou vice-versa. O lado esquerdo nos dá a utilidade marginal do consumo por trabalhador. O lado direito nos dá o acréscimo de utilidade de uma unidade marginal de ativo por trabalhador. Fazendo a diferenciação logarítmica de (75), temos

$$\gamma_v = - \left[\frac{1}{\sigma(c)} \right] \gamma_c \quad (80)$$

onde

$$\sigma(c) \equiv -\frac{\vartheta_c(c, E)}{\vartheta_{cc}(c, E)c} > 0$$

que é uma constante no caso das funções utilidade do tipo CRRA. Esta é a expressão da elasticidade de substituição intertemporal do consumo.

Vemos por (80) que a taxa de variação do consumo por trabalhador c e a taxa de variação do preço sombra do investimento em ativos por trabalhador v apresentam sinais opostos. Se partirmos de um nível de poluição e variedade de poluentes baixo, devemos ter um consumo crescente ao longo do tempo na trajetória rumo ao estado estacionário, o que implica uma redução do preço sombra do ativo ao longo do tempo até o equilíbrio.

Quanto mais linear a função utilidade do consumo, maior é a elasticidade $\sigma(c)$, pois o nível de consumo pode ser alterado ao longo do tempo sem que haja grandes variações de utilidade. Se a utilidade for aproximadamente linear, o preço sombra do ativo por trabalhador praticamente permanecerá constante em resposta a uma variação do consumo por trabalhador.

No caso da obtenção do estado estacionário, ao fazermos $\gamma_c = 0$ temos por decorrência que $\gamma_v = 0$. Ou seja, o equilíbrio do consumo leva a um equilíbrio do preço sombra dos ativos.

1.2.2. Condições para as variáveis de estado

Retomando o resultado em (76), temos que o preço sombra da poluição em termos de utilidade obedece a uma equação diferencial. Rearranjando a expressão, multiplicando os dois lados por $\exp[-(\rho - B)t]$ e integrando do instante inicial ao presente, temos a solução dada por

$$\lambda(t) = \lambda(0) \exp[(\rho - B)t] - \int_0^t \vartheta_E(c(v), E(v)) \exp[(\rho - B)(t - v)] dv$$

em valor corrente ou

$$\lambda(0) = \lambda(t) \exp[-(\rho - B)t] + \int_0^t \vartheta_E(c(v), E(v)) \exp[-(\rho - B)v] dv$$

em valor presente. A expressão em valor corrente mostra que o preço sombra cresce a uma taxa maior do que $\rho - B$, dado o sinal da utilidade marginal da poluição e independentemente do sinal de $\rho - B$. O crescimento do preço sombra desde o momento inicial até o período t em valor corrente se dá de acordo com o impacto sobre a utilidade de um estoque de poluição crescente. Quanto maior o aumento da poluição, maior a diferença positiva entre o preço sombra dos dois períodos.

Usando (75) em (76) e definindo o preço sombra da poluição em termos de bens como $p \equiv \left(\frac{\lambda}{v}\right)$, temos que a dinâmica de λ , o preço sombra da poluição em termos de utilidade, é dada por

$$\gamma_\lambda = (\rho - B) - \left[\frac{\vartheta_E(c, E)}{\vartheta_c(c, E)} \right] p^{-1} \geq 0 \quad (81)$$

onde o sinal não negativo acomoda os casos do crescimento do preço sombra na trajetória rumo ao estado estacionário e da constância do preço sombra no estado estacionário. A expressão (81) pode ser reescrita como

$$\gamma_\lambda = (\rho - B) + A_2 p^{-1} > (\rho - B) \quad (81')$$

onde

$$A_2 \equiv \left. \frac{dc}{dE} \right|_{\bar{y}} = - \left[\frac{\vartheta_E(c, E)}{\vartheta_c(c, E)} \right] > 0$$

é a declividade da curva de indiferença da função utilidade instantânea $\vartheta(c, E)$, conhecida como taxa marginal de substituição (no caso, a substituição entre consumo e um ar mais limpo). O estado estacionário implica $\gamma_\lambda = 0$, o que produz

$$(B - \rho) = A_2 (p^*)^{-1} > 0$$

que pode ser rearranjado como

$$p^* = \left(\frac{A_2}{B - \rho} \right) > 0$$

em que obtemos p^* para um dado coeficiente A_2 , que é constante dado que o consumo e o estoque de poluição sejam constantes no estado estacionário. Fica claro, portanto, que $B > \rho$. Dado que $\rho > 0$, obtemos da expressão acima que $B > A_2 (p^*)^{-1}$, resultado que será usado ao longo da análise para que a condição de transversalidade seja válida.

A expressão (77) mostra a dinâmica do preço sombra da inovação. Ela pode ser reescrita como

$$\gamma_v = -(r - \rho - A_0 p) \quad (82)$$

onde p é o preço sombra da poluição em termos de bens, e $A_0 \equiv \left(\frac{L}{\eta} \right) \left(\frac{\partial \dot{E}}{\partial N} \right) > 0$. No estado estacionário temos $\gamma_v = 0$, o que implica

$$(r - \rho) = A_0 p^*$$

que pode ser rearranjado como

$$p^* = \left(\frac{r - \rho}{A_0} \right) > 0$$

Daí vem que $r > \rho$, onde r é constante no equilíbrio por (23). Por (35), temos que A_0 é constante no estado estacionário para um dado N^* . Dadas as duas expressões encontradas para os preços, temos a seguinte igualdade

$$A_0 A_2 = (r - \rho)(B - \rho) > 0$$

que é uma constante no estado estacionário.

Podemos, a partir de (82), obter uma expressão para a dinâmica do consumo. Substituindo (80) em (82), obtemos

$$\gamma_c = \sigma(c)(r - \rho - A_0 p) \quad (83)$$

O resultado em (83) pode ser comparado com a taxa de evolução do consumo obtida normalmente em modelos de crescimento, dada por $\sigma(c)(r - \rho)$. A existência da poluição, que impacta negativamente sobre o bem-estar, e que resulta do processo de inovação e da produção de bens intermediários e bens finais, faz com que apareça o termo positivo $A_0 p$, que contribuiria para reduzir a taxa de crescimento do consumo por trabalhador no equilíbrio de longo prazo caso ela fosse positiva.

De posse da taxa de crescimento do consumo podemos também aprofundar a expressão vista no capítulo anterior que envolve o valor presente descontado do consumo e a riqueza total do indivíduo. Tomando (83) para o caso de uma função CRRA, temos

$$c(t) = c(0) \exp\left(\int_0^t \sigma[r(w) - \rho - A_0(w)p(w)]dw\right)$$

Retomando (64), vem

$$c(0) = \tau(0)[h(0) + a(0)]$$

onde

$$\tau(0)^{-1} \equiv \exp\left(\int_0^t [(\sigma - 1)r(w) - \sigma\rho - \sigma A_0(w)p(w)]dw\right)$$

Daí vem que o consumo é uma função linear da riqueza. O efeito da taxa real de juros sobre o consumo depende da magnitude da elasticidade de substituição intertemporal do consumo σ . Se $\sigma > 1$, predomina o efeito-substituição. Se $\sigma < 1$, predomina o efeito-renda. Dados empíricos citados por Blanchard e Fischer apontam para a predominância do efeito-renda ou o cancelamento dos efeitos ($\sigma \leq 1$). Logo, o efeito típico é que um aumento da taxa de juros leva a um aumento de $\tau(0)$ e, conseqüentemente, a um aumento de $c(0)$.

Voltemos à dinâmica do consumo dada por (83). Substituindo a expressão da taxa real de juros em (22') na dinâmica do consumo, temos que

$$\gamma_c = \sigma(c) \left[\left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{N}\right) - \rho - A_0 p \right] \quad (84)$$

Mas o coeficiente A_0 depende da sensibilidade das emissões líquidas de poluentes com relação à variedade de produtos dada por (35). Substituindo (35) em (84), temos que

$$\gamma_c = \sigma(c) \left\{ \left(\frac{L}{\eta} \right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{x}{N} \right) - \rho - \left(\frac{L}{\eta} \right) \left\{ (1-\alpha) A \left(\frac{x}{N} \right)^\alpha \varphi(z) + x\beta(N)\mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] \right\} p \right\} \quad (84')$$

A dinâmica do consumo pode ser compreendida plenamente se estudarmos os fatores que influem sobre A_0 e p . Mas, podemos obter os resultados fundamentais nesta seção.

Sabemos que no caso de funções CRRA a elasticidade $\sigma(c)$ é uma constante σ . Supondo uma função CRRA, retomamos (84') e substituímos os valores de equilíbrio, o que leva à dinâmica do consumo dada por

$$\begin{aligned} \gamma_c = \sigma \left\{ \left(\frac{L}{\eta} \right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} - \rho \right. \\ \left. - \left(\frac{L}{\eta} \right) \left\{ (1-\alpha) A^{1/(1-\alpha)} (\alpha^2 z)^{\alpha/(1-\alpha)} \varphi(z) \right. \right. \\ \left. \left. + N(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \beta(N)\mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] \right\} p \right\} \end{aligned} \quad (85)$$

Fazendo $\gamma_c = 0$ no estado estacionário, encontramos o valor de equilíbrio da variedade de produtos pela expressão

$$N^* \beta(N^*) \mu(N^*) \left[\frac{\varphi(z(N^*))}{z(N^*)} \right] = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + \left(\frac{\eta}{L} \right) \rho - 1 \right\} (p^*)^{-1} > 0 \quad (86)$$

que depende inversamente do valor no estado estacionário do preço sombra da poluição em termos de bens. No resultado supusemos, para que haja sentido econômico, que

$$\left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + \left(\frac{\eta}{L} \right) \rho > 1$$

Obtivemos que o preço p^* é uma constante, o que implica uma variedade de preços N^* constante. Daí vem, por (70), um consumo de estado estacionário c^* . De N^* constante obtemos, por (39), o estoque de poluição de equilíbrio E^* .

A dinâmica do consumo pode ser expressa graficamente (Figura 4). Tomemos o ponto (c^*, N^*) sobre a curva, onde $\dot{c} = 0$. Nesse ponto vale (86). Se mantivermos o consumo constante em c^* e aumentarmos a variedade de produtos para N_1 , então é possível ver por (85) que em (c^*, N_1) vale $\dot{c} < 0$. Se partirmos novamente de (c^*, N^*) , onde vale (86), e diminuirmos a variedade de produtos para N_0 , mantendo o consumo constante em c^* , podemos ver por (85) que em (c^*, N_0) vale $\dot{c} > 0$. Daí o sentido das setas presentes na Figura 4, onde pontos à esquerda da curva $\dot{c} = 0$ apresentam um aumento do consumo, e pontos à direita da curva $\dot{c} = 0$ apresentam uma diminuição do consumo.

Da expressão (86) podemos ver também que a adoção de uma tecnologia menos poluente no setor de bens finais (z menor) faz com que o locus $\dot{c} = 0$ se desloque para a esquerda, reduzindo a variedade de produtos de equilíbrio N^* .

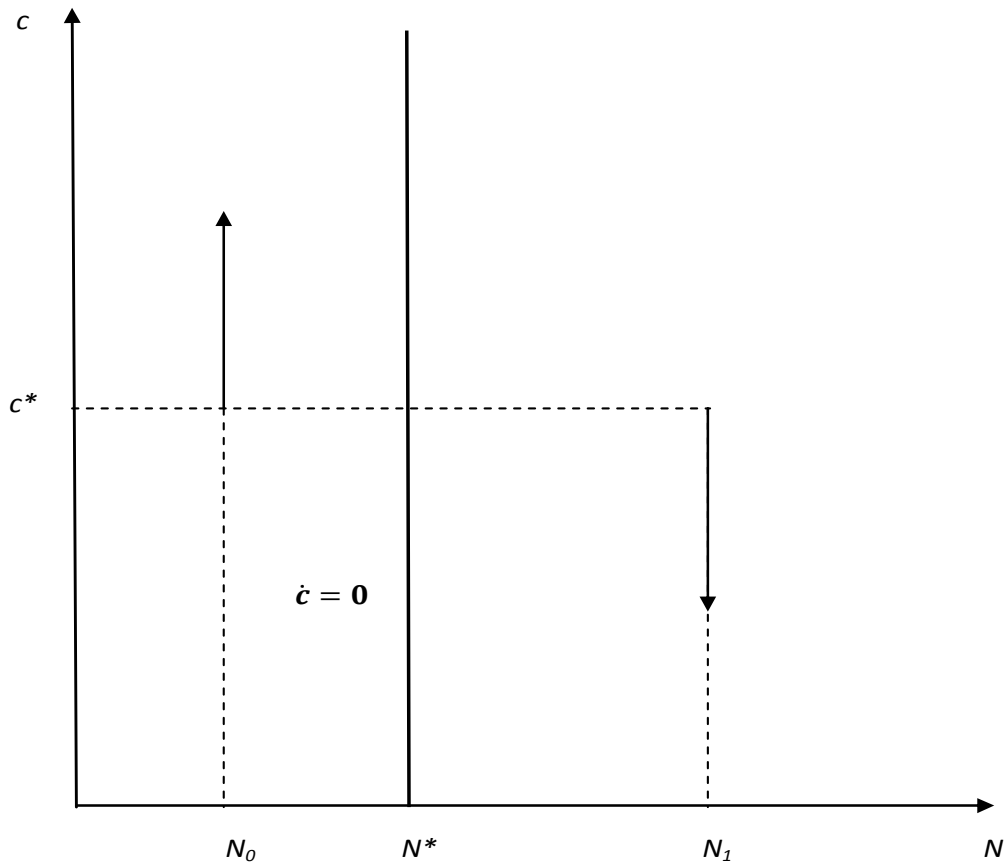


FIGURA 4 - Equilíbrio do consumo por trabalhador

É possível colocar em um mesmo gráfico os locus de pontos de equilíbrio $\dot{c} = 0$ e $\dot{N} = 0$ no plano consumo por trabalhador-variedade de produtos (Figura 5). A dinâmica aponta para um caminho de ponto de sela que conduz ao estado estacionário dado pelo ponto (c^*, N^*) . Partindo de uma dada variedade de produtos positiva N_0 , temos pelo comportamento ótimo do modelo que o agente representativo escolherá c_0 como o nível de consumo por trabalhador, de modo a estar sobre o caminho de ponto de sela rumo ao estado estacionário com máximo bem-estar. O estoque de poluição inicial positivo também é dado por E_0 .

A seguir examinamos o comportamento do preço sombra da poluição em termos de bens para aumentarmos nossa compreensão acerca da dinâmica do consumo e das demais variáveis.

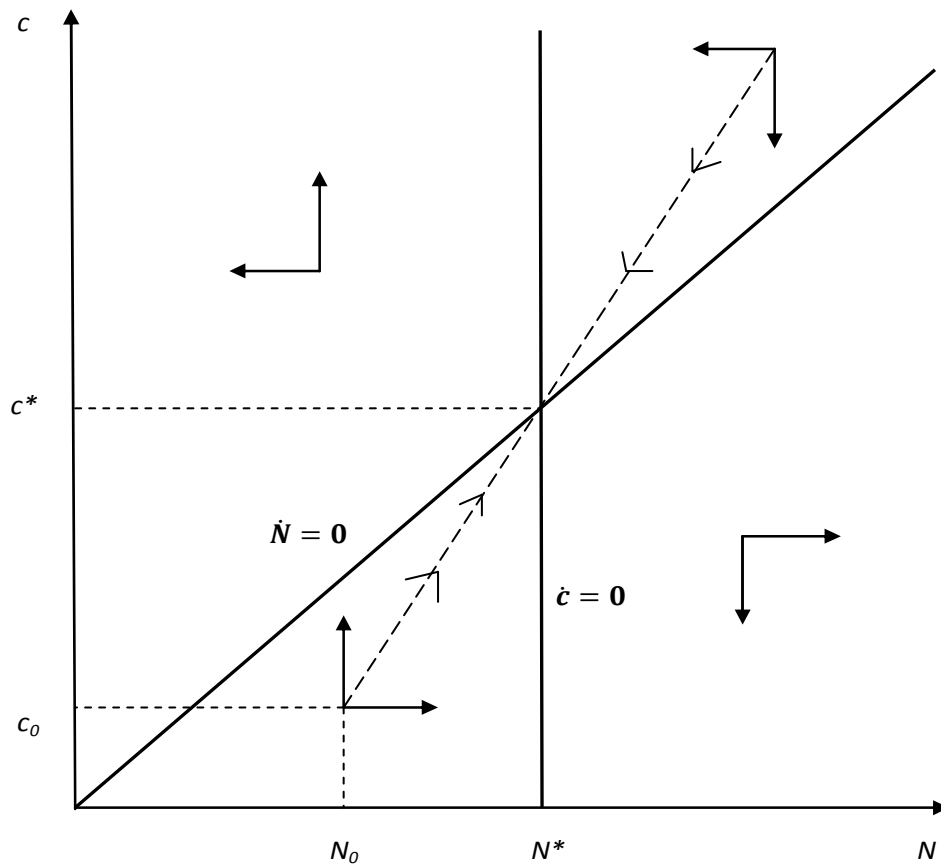


FIGURA 5 - Equilíbrio do consumo por trabalhador e da variedade de produtos

1.2.3. Dinâmica do preço sombra da poluição

O conceito de produto normalmente utilizado é deficiente quando levamos em conta fatores ambientais. Por isso, vamos definir um conceito amplo de produto Q dado por

$$Q = Y - p\dot{E} \quad (87)$$

onde Q é chamado de produto nacional líquido (DASGUPTA, 1995), o que no presente modelo engloba consumo de bens finais e intermediários mais investimento em P&D *menos* danos ambientais provocados pela poluição. Definimos o preço sombra como $p \equiv \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)$, que possui a dimensão bens por poluição. Para isso, precisamos reconhecer que o preço sombra ν possui a dimensão utilidade por bens e o preço sombra λ possui a dimensão utilidade por poluição. O hamiltoniano que vimos anteriormente nada mais é do que o produto nacional líquido expresso em utilidade avaliada no instante inicial. O novo preço sombra p será utilizado para manipular as condições (76) e (77) que nos dão as equações de Euler do modelo.

Como $\gamma_p = \gamma_\lambda - \gamma_\nu$, temos, substituindo (81') e (82), que

$$\gamma_p = -A_0 p + A_1 + A_2 p^{-1} \quad (88)$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{p} = -A_0 p^2 + A_1 p + A_2 \quad (88')$$

onde $A_1 \equiv (r - B)$.

A equação diferencial não-linear em p pode ser resolvida para se obter a dinâmica do preço sombra da poluição em termos de bens. A vantagem de trabalharmos com (88) ou (88') é a de que não precisamos lidar com dois preços sombra na economia.

Vejamos os valores dos coeficientes no equilíbrio. Para o coeficiente A_0 , temos

$$A_0 \equiv \left(\frac{L}{\eta}\right) \frac{\partial \dot{E}}{\partial N} = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left\{ (1 - \alpha) A^{1/(1-\alpha)} (\alpha^2 z)^{\alpha/(1-\alpha)} \varphi(z) + N (A \alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \beta(N) \mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] \right\} > 0$$

Vemos que o valor de equilíbrio de A_0 ainda sofre influência da variedade de produtos N , pois quanto maior a variedade de produtos, maior o coeficiente A_0 . Daí a necessidade de considerarmos como conceito de equilíbrio no presente modelo o estado estacionário em seu sentido mais estrito, o que faz com que todas as variáveis permaneçam constantes no longo prazo e A_0 seja constante.

Por (23), temos que o coeficiente A_1 passa a ser dado no equilíbrio por

$$A_1 = \left[\left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right) (A \alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} - B \right]$$

que é constante.

O coeficiente A_2 é dado por

$$A_2 \equiv \left. \frac{dc}{dE} \right|_{\bar{y}} = - \left[\frac{\vartheta_E(c, E)}{\vartheta_c(c, E)} \right] > 0$$

Para a função utilidade instantânea aditiva separável considerada como exemplo na discussão de (71'), temos que $\left. \frac{dc}{dE} \right|_{\bar{y}} = c^\delta E^{\xi-1}$ com $\xi > 1$. Logo,

$$A_2 \equiv c^\delta E^{\xi-1}$$

Daí vemos que o crescimento do consumo e da poluição leva A_2 a aumentar. Isso reforça a necessidade de analisarmos o equilíbrio com base no estado estacionário em seu sentido estrito, em que as variáveis permanecem constantes no longo prazo, o que leva à constância de A_2 . Substituindo por valores no longo prazo, temos

$$A_2 \equiv [(1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)}N]^\delta \left\{ \left(\frac{1}{B} \right) \left\{ N(A\alpha^{2\alpha}z)^{1/(1-\alpha)}\varphi(z) + (A\alpha^2z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \right\}^{\xi-1}$$

Logo, para uma dada variedade de produtos de equilíbrio, temos que A_2 é constante.

A solução de (87') pode ser analisada por meio de um diagrama de fase. Fazemos a análise da dinâmica do preço sombra da poluição em termos de bens supondo coeficientes constantes, o que em nosso modelo implica o estado estacionário. Retomando a expressão (88'), temos que

$$\frac{d\dot{p}}{dp} = -2A_0p + A_1$$

$$\frac{d^2\dot{p}}{dp^2} = -2A_0 < 0$$

Temos que a concavidade é voltada para baixo. A declividade do diagrama de fase é positiva para $p < \frac{A_1}{2A_0}$ e negativa para $p > \frac{A_1}{2A_0}$. Para buscar as soluções da equação diferencial fazemos $\dot{p} = 0$.

Daí obtemos que existem duas soluções reais dadas por

$$p_1 = \left(\frac{1}{2A_0} \right) \left(A_1 - \sqrt{A_1^2 + 4A_0A_2} \right) < 0$$

$$p_2 = \left(\frac{1}{2A_0} \right) \left(A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4A_0A_2} \right) > 0$$

onde $p_2 > 0 > p_1$.

Graficamente, o diagrama mostra que a solução p_1 produz um equilíbrio instável e a solução p_2 produz um equilíbrio estável (Figura 6). Somente o preço sombra p_2 possui sentido econômico, pois é positivo. Logo, a única solução estável é a que possui sentido econômico.

De (70), temos que consumo por trabalhador e variedade de produtos crescem à mesma taxa. Mas a solução de (88') mostra que, se ambas crescem, os coeficientes A_0 e A_2 aumentam, elevando o termo $4A_0A_2$ no radical da solução e o valor do preço sombra de equilíbrio. Isso contribui, por (83), para uma diminuição contínua da taxa de crescimento do consumo, o que não pode caracterizar um estado de crescimento equilibrado ou um estado estacionário. No entanto, mesmo na hipótese de que a variedade de produtos e o consumo são constantes, temos que variações no estoque de poluição exercem impacto sobre A_2 . Por isso, é necessário supor que no longo prazo ocorra o estado estacionário, com todas as variáveis constantes.

Vamos examinar a trajetória do preço sombra p . A expressão (82') mostra que o preço sombra λ cresce na trajetória rumo ao equilíbrio. A expressão (83) mostra que o preço sombra

v diminui ao longo da trajetória rumo ao equilíbrio. Logo, o preço sombra p cresce rumo ao equilíbrio, o que é consistente com um preço sombra inicial entre p_1 e p_2 . Isso leva a economia rumo ao preço de equilíbrio p_2 .

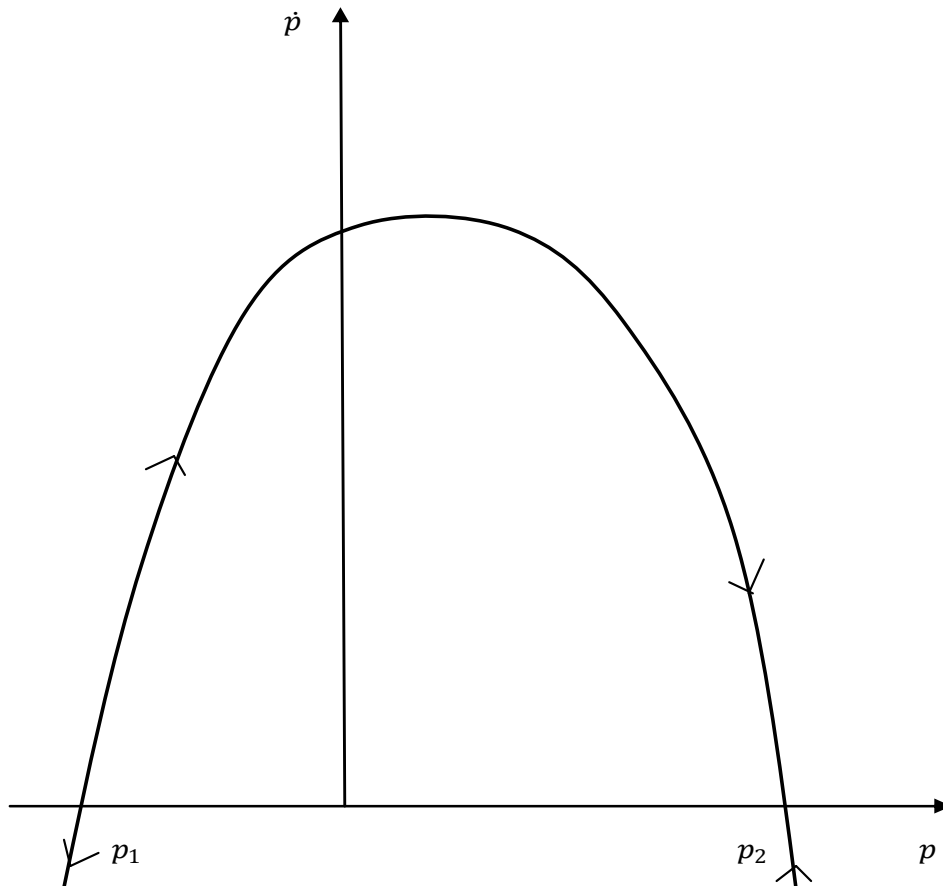


FIGURA 6 - Diagrama de fase da dinâmica do preço sombra da poluição

No equilíbrio, temos que o estoque de poluição é constante. Logo, no longo prazo temos $Q = Y$.

1.2.4. Condições de transversalidade

A condição de transversalidade (78) mostra que o impacto sobre a utilidade no instante inicial de um estoque de poluição positivo no longo prazo é nulo. Essa condição vem da restrição e seu impacto sobre o hamiltoniano. Se juntarmos à análise a desutilidade do estoque de poluição representada na função utilidade, vemos também que a utilidade do estoque de poluição no longo prazo, a uma taxa de desconto ρ , não representa nada no instante inicial.

Por isso, alguns pesquisadores questionam o formato da função utilidade, o qual dá pouco peso para acontecimentos no longo prazo. Determinados problemas ambientais, como, por exemplo, o aquecimento global, nunca terão um peso grande nas decisões feitas a partir de uma função utilidade com uma taxa de desconto $\rho > 0$, uma vez que seus efeitos se manifestam plenamente no longo prazo e praticamente não influenciam as decisões atuais. É por esse motivo que alguns autores especificam funções utilidade não convencionais, como, por exemplo, Beltratti e outros (BELTRATTI; CHICHILNISKY; HEAL, 1995), onde o valor da utilidade no longo prazo possui um peso positivo.

A condição (78) pode ser reescrita como

$$\lambda(0) \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \exp[(A_2 p^{-1} - B)t] = 0 \quad (78')$$

onde utilizamos o resultado em (81'). Para que (78') tenha sentido econômico, é necessário que $B > A_2 p^{-1}$, o que é consequência da dinâmica do preço sombra da poluição λ , conforme vimos em seção anterior.

A interpretação da condição de transversalidade (79) fica mais clara quando a expressão é reescrita como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta N(t) v(t) \exp(-\rho t) = 0 \quad (79')$$

dado que η é uma constante positiva que nos dá o valor ótimo de uma firma de P&D, conforme obtivemos em (20) na análise do equilíbrio do setor de P&D. O valor de todas as firmas do setor de P&D é dado por ηN . A expressão (79') nos diz que, no longo prazo, o impacto sobre a utilidade no instante zero do valor de todas as firmas do setor de P&D no longo prazo é nulo. Isto quer dizer que o indivíduo somente vai se preocupar no longo prazo em ter as firmas estritamente necessárias para viabilizar o plano de consumo ótimo que resulta no máximo bem-estar. Como o preço sombra dos ativos v diminui ao longo do tempo, temos que a condição (79') é verificada no longo prazo.

1.3. Representação gráfica do modelo

Nesta seção procuramos representar graficamente o modelo e analisar alguns casos de política pública e seus impactos sobre as principais variáveis do modelo. O enfoque se dá mais em termos de compreensão dos resultados. Um resumo das equações de dinâmica e das expressões com os valores de equilíbrio das variáveis mais importantes é dado na seção seguinte.

A representação gráfica do modelo é feita retomando os resultados da Figura 5 e da Figura 1 em um único gráfico com diversos quadrantes (Figura 7). No primeiro quadrante, temos o conteúdo da Figura 5, onde o locus de pontos de equilíbrio do consumo por trabalhador e o locus de pontos de equilíbrio da variedade de produtos são colocados no plano envolvendo consumo e variedade de produtos. No segundo quadrante, temos curvas de indiferença entre consumo e poluição. Pelo fato da poluição ser um mal, as curvas de

indiferença entre consumo e poluição são positivamente inclinadas. No terceiro quadrante temos uma reta de 45° que replica nos dois eixos o estoque de poluição. No quarto quadrante, temos o locus de pontos de equilíbrio do estoque de poluição.

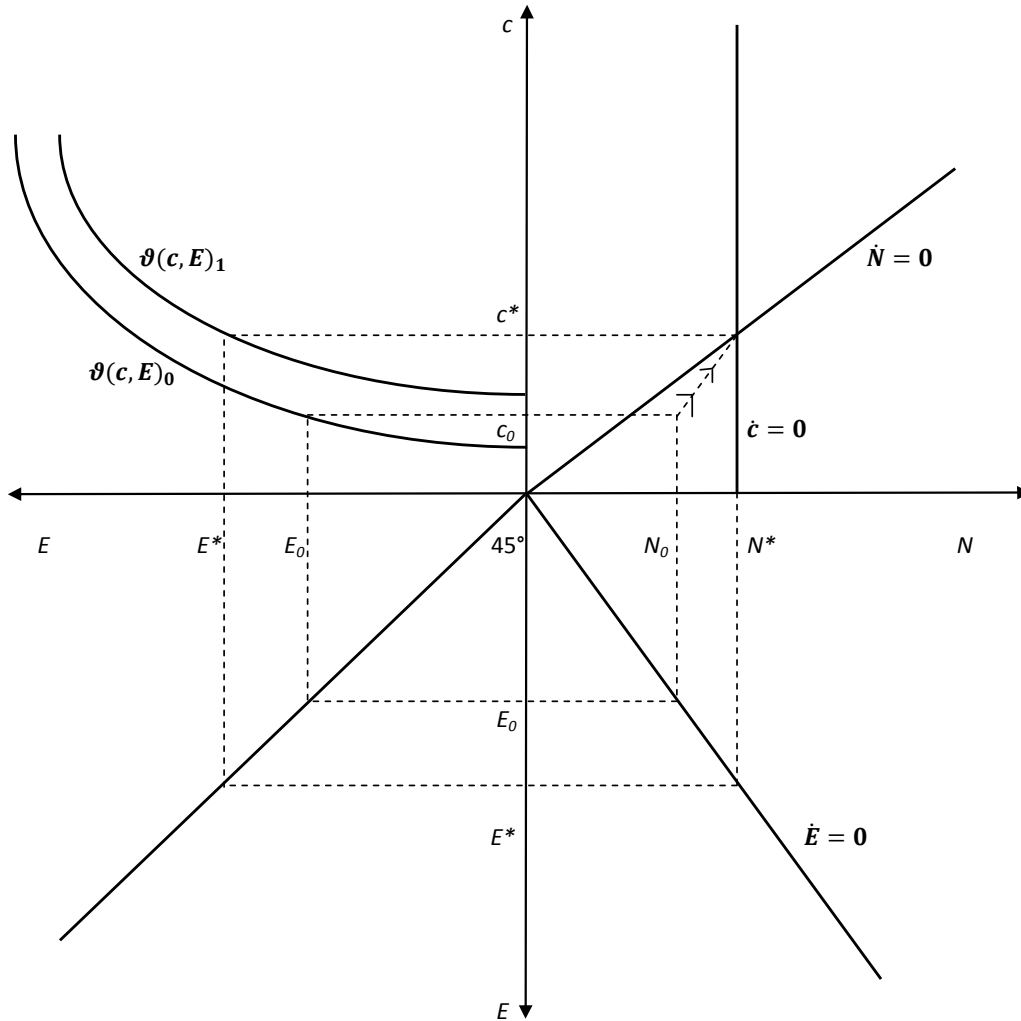


Figura 7 – Equilíbrio do modelo de crescimento com variedade de produtos e poluição

A Figura 7 mostra o ajuste que ocorre desde o ponto inicial (c_0, N_0, E_0) até o ponto final (c^*, N^*, E^*) . A trajetória é identificada no primeiro quadrante pelo caminho de ponto de sela (omitimos as setas da dinâmica para que isso não prejudique a visualização). Como subproduto, em cada ponto a economia pode determinar no segundo quadrante o estoque de poluição de equilíbrio. Supomos que a economia escolha sempre pontos sobre a curva $\dot{E} = 0$. Quanto ao bem-estar, supusemos que no estado estacionário a utilidade é maior que no

momento inicial (e que, por isso, a curva de indiferença é mais elevada no estado estacionário).

Um exercício interessante é verificar o que acontece em uma economia com uma tecnologia com grau poluidor menor no setor de bens finais em relação a uma economia com os mesmos parâmetros mas utilizando uma tecnologia com grau poluidor maior. O efeito é o mesmo da adoção de uma legislação que limite o uso de tecnologias com grau poluidor maior no setor de bens finais. Os resultados estão na Figura 8.

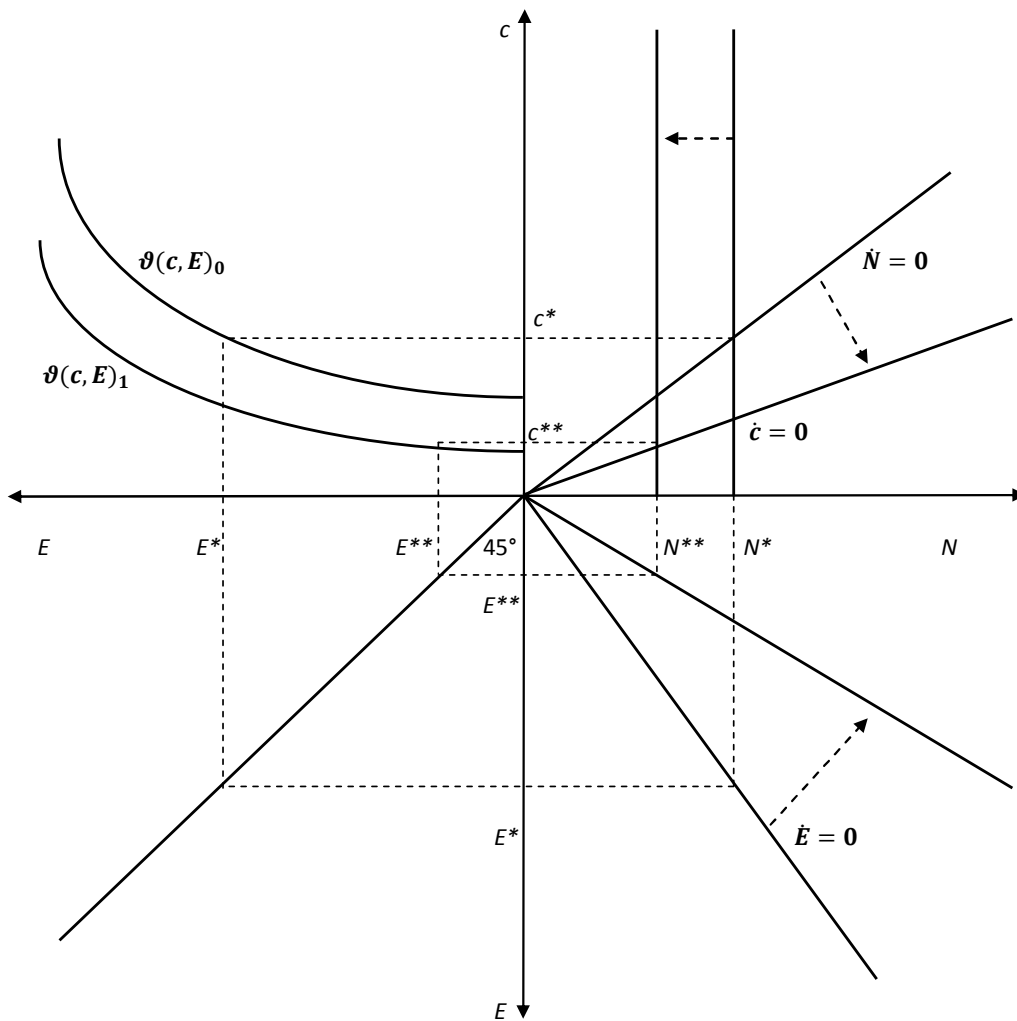


Figura 8 – Efeito de uma tecnologia com menor grau poluidor no setor de bens finais

A utilização de uma tecnologia com grau poluidor menor no setor de bens finais exerce o efeito de deslocar as curvas $\dot{E} = 0$, $\dot{N} = 0$ e $\dot{c} = 0$ no sentido indicado pelas setas no gráfico.

É fácil ver que a economia passou do ponto de estado estacionário (c^*, N^*, E^*) para o ponto (c^{**}, N^{**}, E^{**}) . No novo equilíbrio, o consumo por trabalhador é menor, a variedade de produtos é menor e o estoque de poluição é menor. O efeito sobre o bem-estar é incerto, uma vez que a redução do consumo por trabalhador diminui a utilidade mas a redução da poluição aumenta a utilidade. A Figura 8 mostra um caso particular de mapa de indiferença em que a nova situação está associada a uma utilidade instantânea menor.

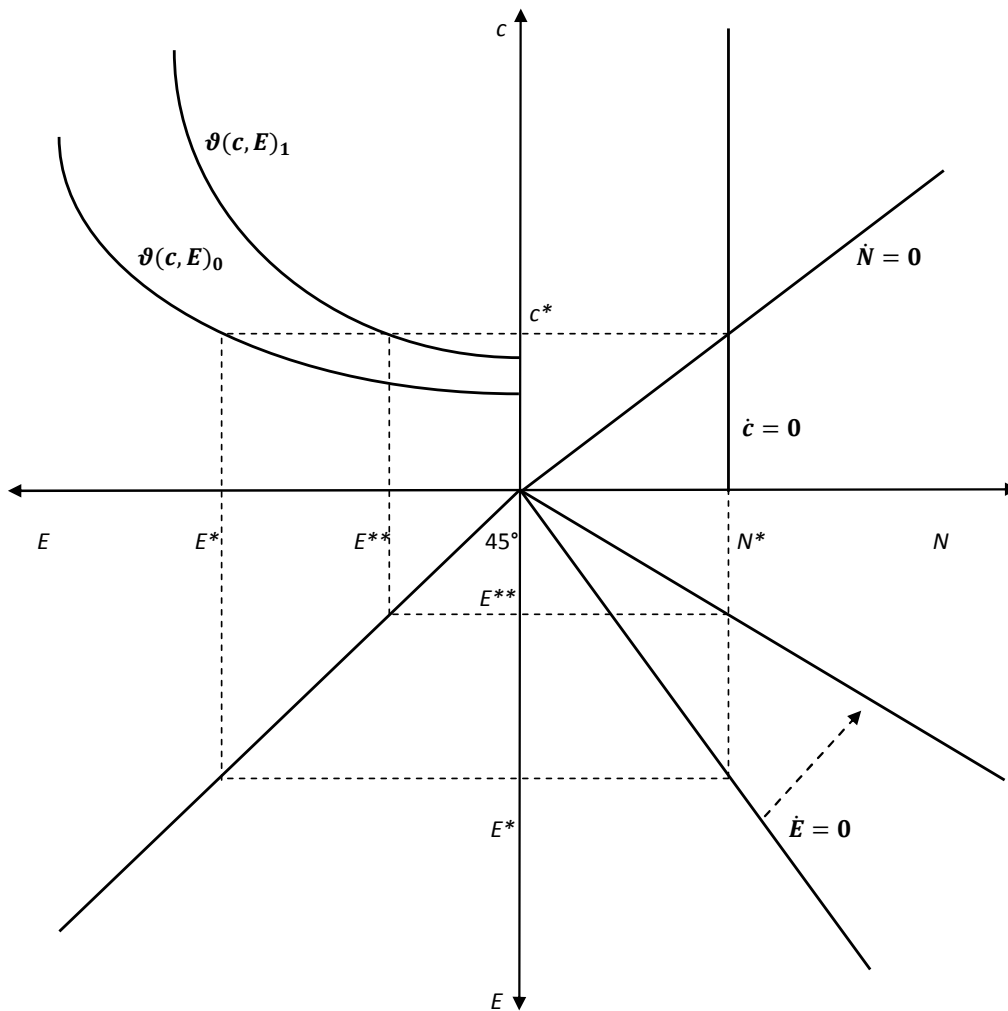


Figura 9 – Efeito de uma tecnologia com menor grau poluidora no setor de bens intermediários

Uma outra política pública que pode ser estudada é a implementação de uma lei que favoreça a adoção de tecnologias com menor grau poluidora no setor de bens intermediários (redução de $z(j)$). Essa política equivale no gráfico a leis que forcem o tratamento de poluentes de modo que seu potencial poluidor seja reduzido (redução de $\mu(j)$). O gráfico representando qualquer uma dessas políticas está na Figura 9.

Pela Figura 9 é possível ver que a adoção de tecnologias com grau poluidor menor no setor de bens intermediários, desde que não seja no N -ésimo bem intermediário, faz com que o consumo por trabalhador e a variedade de produtos permaneça igual no novo estado estacionário. Ocorre uma redução da poluição, o que faz com que o bem-estar aumente e a economia atinja uma curva de indiferença mais elevada. Caso a adoção de tecnologia com grau poluidor menor ocorra no N -ésimo bem intermediário, podemos ter uma modificação da posição do locus de pontos de equilíbrio do consumo por trabalhador, o qual se desloca um pouco para a direita (por (86)), corroborando o resultado anterior.

De posse dos exercícios de política pública feitos nos gráficos anteriores, vemos que é possível utilizar o modelo exposto neste trabalho para analisar muitos outros tipos de política pública. Para permitir uma melhor visualização do impacto de uma mudança em cada variável importante, fazemos na próxima seção um resumo das principais equações de dinâmica e dos valores de equilíbrio, o que facilita a utilização do modelo para o leitor a fim de analisar outros casos não constantes aqui.

1.4. Resumo do equilíbrio e da dinâmica das variáveis principais

Nesta seção procuramos reunir as expressões encontradas ao longo do trabalho para o valor de equilíbrio de cada uma das variáveis relevantes do modelo e para a dinâmica das principais variáveis. O propósito é simplesmente sistematizar os resultados obtidos anteriormente e facilitar a análise do impacto de qualquer mudança na economia sobre alguma variável de interesse específica.

Produto por trabalhador:

$$y = N(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (19')$$

Produto efetivo do setor de bens intermediários por trabalhador:

$$x = \alpha^2 y = N(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (16'')$$

Lucro do setor de bens intermediários:

$$\Pi(v) = \Pi = N\pi_j = N\pi = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) NL (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (17)$$

Valor ótimo de uma firma:

$$V(t) = \int_t^\infty \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) L (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \exp\left(-\int_t^v r(w)dw\right) dv \quad (18)$$

Taxa real de juros:

$$r = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \quad (23)$$

Estoque de poluição de equilíbrio ($\dot{E} = 0$):

$$E = \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ N(A\alpha^{2\alpha} z^\alpha)^{1/(1-\alpha)} \varphi(z) + (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \quad (30'')$$

Variedade de produtos de equilíbrio ($\dot{N} = 0$):

$$c = (1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)} N \quad (70)$$

Consumo por trabalhador de equilíbrio ($\dot{c} = 0$):

$$N^* \beta(N^*) \mu(N^*) \left[\frac{\varphi(z(N^*))}{z(N^*)} \right] = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left\{ \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] + \left(\frac{\eta}{L}\right) \rho - 1 \right\} (p^*)^{-1} > 0 \quad (86)$$

Dinâmica do estoque de poluição:

$$\dot{E} = N(A\alpha^{2\alpha} z^\alpha)^{1/(1-\alpha)} \varphi(z) + (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - BE \quad (39)$$

Dinâmica da variedade de produtos:

$$\gamma_N = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left[(1 - \alpha^2)(A\alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)} - \left(\frac{c}{N}\right) \right] \quad (69)$$

Dinâmica do consumo por trabalhador:

$$\begin{aligned} \gamma_c = \sigma \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} - \rho \right. \\ \left. - \left(\frac{L}{\eta}\right) \left\{ (1-\alpha) A^{1/(1-\alpha)} (\alpha^2 z)^\alpha / (1-\alpha) \varphi(z) \right. \right. \\ \left. \left. + N(A\alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \beta(N) \mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] \right\} p \right\} \quad (85) \end{aligned}$$

Dinâmica do preço sombra da poluição em termos de bens:

$$\dot{p} = -A_0 p^2 + A_1 p + A_2 \quad (88')$$

onde

$$\begin{aligned}
A_0 &\equiv \left(\frac{L}{\eta}\right) \frac{\partial \dot{E}}{\partial N} = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left\{ (1-\alpha) A^{1/(1-\alpha)} (\alpha^2 z)^{\alpha/(1-\alpha)} \varphi(z) \right. \\
&\quad \left. + N (A \alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \beta(N) \mu(N) \left[\frac{\varphi(z(N))}{z(N)} \right] \right\} > 0 \\
A_1 &\equiv \left[\left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A \alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} - B \right] \\
A_2 &\equiv \left. \frac{dc}{dE} \right|_{\bar{y}} = - \left[\frac{\vartheta_E(c, E)}{\vartheta_c(c, E)} \right] \\
&= [(1-\alpha^2) (A \alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)} N]^\delta \left\{ \left(\frac{1}{B}\right) \left\{ N (A \alpha^{2\alpha} z)^{1/(1-\alpha)} \varphi(z) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (A \alpha^2 z)^{1/(1-\alpha)} \int_0^N \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj \right\} \right\}^{\xi-1} > 0
\end{aligned}$$

Terminamos aqui a exposição da solução do modelo para o caso de uma economia descentralizada. Na seção seguinte, procuramos fazer uma discussão sucinta do caso centralizado, em que existe um planejador onisciente.

2. Solução para a economia centralizada

Supomos que estamos em uma economia centralizada em que existe um planejador onisciente. Ele tem condições de levar em conta as externalidades e as imperfeições do mercado. O problema desta seção é dado pela maximização do bem-estar do indivíduo representativo dado por

$$U = \int_0^\infty \vartheta(c, E) \cdot \exp(-\rho t) dt$$

sujeito às restrições

$$\dot{E} = AN^{1-\alpha} x^\alpha \varphi(z) + x \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)} \right] dj - BE$$

e

$$\dot{N} = \left(\frac{L}{\eta}\right) [zAN^{1-\alpha} x^\alpha - c - x]$$

Ou seja, na obtenção da solução centralizada, levamos em conta que o planejador central está limitado pela restrição orçamentária da economia e pelo comportamento das emissões líquidas de poluentes. São dados os valores iniciais $N_0 \equiv N(0) > 0$ e $E_0 \equiv E(0) > 0$. Em algumas derivações a seguir vamos utilizar o formato específico da função emissões dado por $\varphi(z) = z^\beta$, com $\beta > 1$.

As variáveis de controle são consumo (c), bens intermediários por trabalhador (x) e grau poluidor da tecnologia empregada no setor de bens finais (z). Supomos implicitamente que o governo pode regular a poluição de forma direta por meio de uma legislação ambiental que imponha um limite à tecnologia mais poluente que pode ser utilizada no setor de bens finais. As variáveis de estado são o estoque de poluição (E) e a variedade de produtos (N). Além de considerarmos apenas soluções com valores positivos das variáveis relevantes, temos a seguinte restrição adicional:

$$z \leq 1$$

Não consideramos como variáveis de controle a tecnologia do setor de bens intermediários ($z(j)$) e o potencial poluidor do poluente ($\mu(j)$) por produzirem resultados não interessantes em termos econômicos.

Para fazer a análise de maximização do bem-estar sujeito às restrições dinâmicas e às desigualdades, precisamos utilizar, em vez do hamiltoniano, um lagrangiano que dê conta de todos os tipos de restrições. Para o presente problema, o lagrangiano é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, z, z(j), \mu(j), a, E, \lambda, v) &= \left\{ \vartheta(c(t), E(t)) + v(t) \left(\frac{L}{\eta} \right) [z(t)A(t)N(t)^{1-\alpha}x(t)^\alpha - c(t) - x(t)] \right. \\ &\quad - \lambda(t) \left\{ A(t)N(t)^{1-\alpha}x(t)^\alpha \varphi(z(t)) + x(t) \int_0^{N(t)} \beta(j, t) \mu(j, t) \left[\frac{\varphi(z(j, t))}{z(j, t)} \right] dj \right. \\ &\quad \left. \left. - BE(t) \right\} \right\} \exp(-\rho t) + \omega(1 - z) \end{aligned} \tag{89}$$

2.1. Condições de primeira ordem

As condições de primeira ordem para solução do modelo são dadas por

$$\mathcal{L}_c = 0$$

$$\mathcal{L}_x = 0$$

$$\mathcal{L}_z \leq 0 \quad z \geq 0 \quad z\mathcal{L}_z = 0$$

$$\frac{d[\lambda(t) \exp(-\rho t)]}{dt} = -\mathcal{L}_E$$

$$\frac{d[v(t) \exp(-\rho t)]}{dt} = -\mathcal{L}_N$$

Aplicando as condições acima a (89) temos

$$\vartheta_c(c(t), E(t)) = v(t) \left(\frac{L}{\eta} \right) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} v(t) \left(\frac{L}{\eta} \right) [\alpha z(t) A(t) N(t)^{1-\alpha} x(t)^{\alpha-1} - 1] \\ - \lambda(t) \left\{ \alpha A(t) N(t)^{1-\alpha} x(t)^{\alpha-1} \varphi(z(t)) + \int_0^{N(t)} \beta(j, t) \mu(j, t) \left[\frac{\varphi(z(j, t))}{z(j, t)} \right] dj \right\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{se } p \leq \beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta} \right) \\ \left[\beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta} \right) p^{-1} \right]^{1/(\beta-1)} & \text{se } p > \beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta} \right) \end{cases} \quad (92)$$

$$\dot{\lambda}(t) - \rho \lambda(t) = -\vartheta_E(c(t), E(t)) - B \lambda(t) \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) - \rho v(t) = -v(t) (1 - \alpha) z(t) A(t) \left(\frac{L}{\eta} \right) \left[\frac{x(t)}{N(t)} \right]^\alpha + \lambda(t) (1 - \alpha) A(t) \left[\frac{x(t)}{N(t)} \right]^\alpha \varphi(z(t)) \\ + \lambda(t) x(t) \beta(N(t), t) \mu(N(t), t) \left[\frac{\varphi(z(N(t), t))}{z(N(t), t)} \right] \end{aligned} \quad (94)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \lambda(t) \exp(-\rho t) = 0 \quad (95)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) v(t) \exp(-\rho t) = 0 \quad (96)$$

As expressões (90)-(92) são condições de primeira ordem relativas às variáveis de controle. As expressões (93)-(94) são condições de primeira ordem relativas às variáveis de estado. As expressões (95)-(96) são condições de transversalidade para as variáveis de estado.

2.2. Interpretação das condições

2.2.1. Condições para as variáveis de controle

A condição (90) apresenta interpretação semelhante à condição análoga da solução descentralizada. Ela expressa que na maximização de bem-estar o acréscimo de utilidade proporcionado por um incremento marginal de consumo é igual ao acréscimo de utilidade de um incremento marginal na variedade de produtos. Ou seja, a alocação entre consumo e investimento nesta economia é adequada, não havendo incentivos para uma realocação.

De (90) obtemos, tal como antes, que

$$\gamma_v = - \left[\frac{1}{\sigma(c)} \right] \gamma_c \quad (97)$$

onde $\sigma(c)$ é a elasticidade de substituição intertemporal de consumo.

As condições (91)-(92) não possuem análogo na solução descentralizada. De (91), obtemos o valor ótimo da produção do setor de bens intermediários em termos por trabalhador na economia centralizada x^c , que é dado por

$$x^c = z^{1/(1-\alpha)} A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{1/(1-\alpha)} N \Omega \quad (98)$$

O sinal positivo pressupõe $\left(\frac{L}{\eta}\right) > p \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]$. Temos que

$$\Omega \equiv \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) - p \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right] \right\}^{1/(1-\alpha)} \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) + p \int_0^N \beta(j) \mu(j) \left[\frac{\varphi(z(j))}{z(j)}\right] dj \right\}^{-1/(1-\alpha)} < 1$$

dado que a quantidade de equilíbrio x^c é positiva. Comparando x^c com a quantidade ótima na economia descentralizada x , temos que

$$x = \alpha^{1/(1-\alpha)} \Omega^{-1} x^c \quad (99)$$

Não é possível a priori dizer se a quantidade ótima produzida na economia centralizada é maior ou menor que a da economia descentralizada. Em um contexto sem poluentes, Barro e Sala-i-Martin (BARRO;SALA-I-MARTIN, 2004) mostraram que a quantidade ótima da economia centralizada é maior. No entanto, no presente contexto temos a externalidade negativa trazida pela poluição, o que torna o resultado final incerto, dependendo da comparação de $\alpha^{1/(1-\alpha)}$ com Ω . Se o segundo termo for maior do que o primeiro, teremos que na economia centralizada a produção é maior.

A relação entre o produto da economia e a produção efetiva do setor de bens intermediários na economia centralizada é dada por

$$x = \alpha \Omega y \quad (100)$$

A relação existente na economia descentralizada era dada por $x = \alpha^2 y$ em (16''). Como não é possível determinar se a produção efetiva do setor de bens intermediários é maior ou menor na economia centralizada, também não conseguimos determinar se o produto da economia é maior ou menor, uma vez que esse resultado depende da magnitude do insumo empregado.

Vamos examinar agora a condição (92). O grau poluidor do setor de bens finais é considerado como variável de controle porque o planejador central pode determinar, por meio de uma legislação apropriada, qual é o nível dessa variável na economia. Vemos que quando o preço sombra da poluição em termos de bens p (definido anteriormente neste capítulo) é menor ou igual a um valor limite $\beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta}\right)$, a tecnologia com o grau poluidor mais elevado

($z = 1$) é utilizada. Neste caso, o produto efetivo é igual ao produto potencial. No entanto, se o preço sombra se eleva ao longo do tempo, temos que a partir de um dado valor há incentivos para que uma tecnologia com grau poluidor cada vez menor seja utilizada. O grau poluidor menor a ser utilizado nesta economia, supondo que no estado estacionário $p^* > \beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta}\right)$, é dado por

$$z^* = \left[\beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta}\right) (p^*)^{-1} \right]^{1/(\beta-1)} < 1$$

Como vimos anteriormente que o comportamento típico do preço sombra é sua elevação ao longo do tempo até o valor de estado estacionário, temos que um grau poluidor menor de tecnologia deve ser utilizado na economia no equilíbrio, respeitada a condição $p^* > \beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta}\right)$.

2.2.2. Condições para as variáveis de estado

A expressão (93) é idêntica à obtida na solução descentralizada, e por isso remetemos o leitor às considerações feitas naquele ponto da exposição.

A condição (94) produz

$$\gamma_v = - \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) z(t) \alpha A(t) \left[\frac{x(t)}{N(t)}\right]^\alpha - \rho - A_0^c p \right\}$$

onde

$$A_0^c \equiv \frac{\partial \dot{E}}{\partial N} > 0$$

Note que o coeficiente A_0^c difere de A_0 da solução descentralizada por um fator multiplicativo $\left(\frac{L}{\eta}\right)$. Substituindo o resultado de (98), temos

$$\gamma_v = - \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (z\alpha A)^{1/(1-\alpha)} \Omega^\alpha - \rho - A_0^c p \right\} \quad (101)$$

Substituindo (97) em (101) vem

$$\gamma_c = \sigma(c) \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (z\alpha A)^{1/(1-\alpha)} \Omega^\alpha - \rho - A_0^c p \right\} \quad (102)$$

Da dinâmica do consumo em (102) podemos ver que a taxa real de juros em uma economia centralizada é dada por

$$r^c = \left(\frac{L}{\eta}\right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (z\alpha A)^{1/(1-\alpha)} \Omega^\alpha \quad (103)$$

A taxa real de juros da economia descentralizada é

$$r = \alpha^{1/(1-\alpha)} \Omega^{-\alpha} r^c$$

As distorções que levam a uma diferença entre as taxas de juros são a presença de concorrência imperfeita no setor de bens intermediários e a externalidade negativa da poluição. Não é possível avaliar qual das taxas de juros é maior sem compararmos a magnitude de $\alpha^{1/(1-\alpha)}$ e $\Omega^{-\alpha}$.

A consequência da comparação entre as taxas reais de juros é que não é possível avaliar se o consumo cresce a uma taxa maior ou menor no contexto centralizado. Esse resultado decorre da taxa real de juros e do coeficiente A_0^c menor que A_0 , o que faz com que o impacto total seja ambíguo.

2.2.3. Dinâmica do preço sombra da poluição

A dinâmica do preço sombra é dada por uma equação semelhante à anterior, com

$$\dot{p} = -A_0^c p^2 + A_1^c p + A_2 \quad (104)$$

onde $A_1^c \equiv (r^c - B)$. Temos que A_2 é o mesmo visto na análise da economia descentralizada. A diferença entre (88') e (104) é mínima, e todas as conclusões qualitativas permanecem. Logo, devemos esperar que o preço sombra cresça em sua trajetória rumo ao equilíbrio e, dada a condição $p^* > \beta^{-1} \left(\frac{L}{\eta} \right)$, devem ser adotadas tecnologias mais limpas no setor de bens finais como resultado do comportamento ótimo da economia.

2.2.4. Condições de transversalidade

As condições de transversalidade são as mesmas da economia descentralizada e, por isso, remetemos o leitor à discussão anterior.

3. Conclusões

Fizemos neste capítulo a análise do estado estacionário do modelo na ótica centralizada e na ótica descentralizada. Obtivemos um aparato gráfico que pode ser usado para analisar alternativas de política pública envolvendo a adoção de tecnologias limpas e a imposição de uma legislação ambiental mais rigorosa. Obtivemos, em particular, que a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens intermediários eleva o bem-estar, enquanto que a adoção de tecnologias menos poluentes no setor de bens finais exerce um efeito ambíguo sobre o bem-estar. Também comparamos os valores do produto do setor de bens intermediários, do produto da economia e da taxa real de juros na economia centralizada e na economia descentralizada. No entanto, a existência da concorrência imperfeita no setor de bens intermediários e a presença da poluição como externalidade negativa faz com que seja

impossível avaliar se o produto em cada setor e a taxa de juros é maior ou menor na economia centralizada em relação à economia descentralizada.

O modelo estudado aqui fornece algumas linhas a serem desenvolvidas. A simulação do modelo para diversos cenários pode trazer resultados interessantes. A extensão do modelo para o contexto envolvendo diversos países também pode auxiliar na articulação de políticas ambientais de cunho global. Estes são os pontos que procuraremos aprofundar no futuro.

REFERÊNCIAS

- ACEMOGLU, Daron. *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.
- AGHION, Philippe; HOWITT, Peter. *The Economics of Growth*. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.
- _____. *Endogenous Growth Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
- _____. A Model of Growth through Creative Destruction. *Econometrica* v.60, n.2, p.323-351, Mar. 1992.
- BARRET, Scott. Montreal versus Kyoto: International Cooperation and the Global Environment. In: KAUL, Inge; GRUNBERG, Isabelle; STERN, Marc A. (Orgs.) *Global Public Goods: international cooperation in the 21st century*. New York: Oxford University Press, 1999, p. 192-219.
- BARRO, Robert J.; SALA-I-MARTIN, Xavier. *Economic Growth – Second Edition*. Cambridge, MA: MIT Press, 2004.
- BELTRATTI, Andrea; CHICHILNISKY, Graciela; HEAL, Geoffrey. Sustainable growth and the Green Golden Rule. In: GOLDIN, Ian; WINTERS, L. Alan. (Orgs.) *The Economics of Sustainable Development*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, p. 147-166.
- BLANCHARD, Olivier Jean; FISCHER, Stanley. *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.
- CASS, David. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies* v.32, n.3, p. 233-240, July 1965.
- CHIANG, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization*. New York: McGraw-Hill, 1992.
- DASGUPTA, Partha. Optimal development and the idea of net national product. In: GOLDIN, Ian; WINTERS, L. Alan. (Orgs.) *The Economics of Sustainable Development*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, p. 111-143.
- DASGUPTA, Susmita; LAPLANTE, Benoit; WANG, Hua; WHEELER, David. Confronting the Environmental Kuznets Curve. *Journal of Economic Perspectives* v.16, n.1, p. 147-168, Winter 2002.
- FRIEDMAN, Milton. *A Theory of the Consumption Function*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.
- GROSSMAN, Gene M. Pollution and growth: what do we know? In: GOLDIN, Ian; WINTERS, L. Alan. (Orgs.) *The Economics of Sustainable Development*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, p. 19-46.

- HANLEY, Nick; SHOGREN, Jason F.; WHITE, Ben. *Environmental Economics in theory and practice*. Houndmills: Macmillan, 1997.
- INTRILIGATOR, Michael D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- KOOPMANS. Tjalling C. On the Concept of Optimal Economic Growth. In: *The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 225-295.
- LUCAS, Robert E., Jr. On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics* v.22, n.1, p. 3-42, July 1988.
- RAMSEY, Frank P. A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal* v.38, n.151, p. 543-559, Dec. 1928.
- ROMER, Paul M. Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* v.98, n.5, part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise Systems, p. S71-S102, Oct. 1990.
- _____. Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization. *American Economic Review Papers and Proceedings* v.77, n.2, p. 56-62, May 1987.
- SOLOW, Robert M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics* v.70, n.1, p. 65-94, Feb. 1956.
- STOKEY, Nancy L. Are There Limits to Growth? *International Economic Review* v.39, n.1, p. 1-31, Feb. 1998.
- SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria Analítica*. (Volume 1) São Paulo: McGraw-Hill, 1983.